Rapport de stage Mim1

—

Logique équationnelle et probabilités selon Halpern

Guillaume Burel

13 Juin – 25 Juillet 2003

Stage encadré par
Olivier Bournez
Claude Kirchner
LORIA-INRIA (CNRS, UMR 7503)
615, rue du Jardin Botanique
54602 Villers-lès-Nancy Cedex

Table des matières

Introduction

L'introduction de probabilités en logique est motivée par le besoin de faire des raisonnements prenant en compte l'incertitude, pour lesquels on aimerait savoir à quel point on peut se fier à une affirmation particulière. De tels raisonnements trouveraient des applications dans des domaines variés, comme par exemple l'intelligence artificielle ou le domaine médical. En effet, dans le cadre de la logique classique du premier ordre, à partir d'assertions telles que "tout patient qui a l'hépatite a la jaunisse", on peut parvenir à certains résultats de décision, mais on ne peut pas traiter d'informations de type statistique de la forme "80% des patients ayant la jaunisse ont une hépatite". Pour parvenir à des résultats de décision, il faut alors assigner des probabilités, ou plutôt des *degrés de croyance* à des formules logiques. Par exemple, le médecin pourra déterminer le degré de croyance d'un événement tel que "Éric a une hépatite" à partir d'une base de connaissances contenant à la fois des informations statistiques du type précédant, et des informations particulières concernant Éric.

Dans ses travaux, Halpern introduit de diverses manières des probabilités dans la logique du premier ordre. Il décrit également des méthodes permettant de parvenir aux degré de croyance qu'il définit. Toutefois ces techniques ne s'appliquent que dans des cas particuliers de ces logiques, car il montre dans [AH94, GHK96b] que dans le cas général, le calcul de ces degrés de croyance est hautement indécidable.

Concernant la logique équationnelle, d'autres approches ont déjà été envisagées, comme le fait d'introduire des probabilités dans les règles de réécriture : cf. [BK02, BH03]. Il s'agit dans ce cas plutôt d'un processus opérationnel, car on regarde la probabilité qu'un terme puisse se réduire en un autre en appliquant les règles de réécriture à la manière d'une chaîne de Markov, tandis que l'approche de Halpern consiste plutôt à vérifier la validité de formules dans des modèles.

Mon travail lors de ce stage a été de voir à quels résultats on peut parvenir si on applique les méthodes de Halpern à la logique équationnelle. Je me suis tout d'abord intéressé à savoir si une technique particulière, appelée méthode de l'entropie maximum, pouvait être appliquée dans ce cas particulier. Comme cette technique ne semble pas se transposer de manière évidente, je me suis ensuite intéressé à savoir si le calcul des degrés de croyance reste indécidable comme dans le cas général de la logique du premier ordre avec au moins un prédicat non unaire. La preuve de cette indécidabilité ne paraît pas évidente, mais sa recherche nous a amené à pouvoir exprimer avec la logique équationnelle des idées plus fortes que de simples équations (on peut ainsi exprimer des inéquations dans certaines conditions). Enfin, plus généralement j'ai étudié quelles conséquences le fait de se restreindre à la logique équationnelle a par rapport aux degrés de libertés des formules, suivant les cas de figure dans lesquels on se place.

Dans la section 1 je présenterai les logiques introduites par Halpern et les résultats auxquels il est parvenu. Je m'attacherai dans la section 2 à regarder lesquels de ses résultats sont encore valables pour la logique équationnelle. Enfin dans la section 3 je m'intéresserai à savoir à quel point il est intéressant d'attacher des probabilités à la manière de Halpern à la logique équationnelle, ou si on a pas affaire à ce qu'on nomme loi 0-1, comme celle intervenant pour les formules purement relationnelles qui ont leur degré de croyance valant soit 0, soit 1.

1 Logique de probabilité du premier ordre à la Halpern

1.1 Deux logiques complémentaires

Dans [Hal89], Halpern définit deux types de logique faisant intervenir des probabilités. La première décrit une sémantique pour des faits statistiques comme "La probabilité qu'un oiseau choisit au hasard vole est 0,9". La seconde permet plutôt de définir des *degrés de croyance* comme "la probabilité que l'oiseau particulier Tweety vole est 0,9".

1.1.1 Probabilités sur le domaine

A la logique du premier ordre sur l'ensemble de symboles Φ on ajoute la possibilité d'écrire des formules du type $\omega_x(\varphi(x)) \leqslant 1/2$, qui doit être interprétée comme "la probabilité que, pour un x choisit au hasard dans le domaine la formule $\varphi(x)$ soit valide, est inférieure à $1/2$". Il faut voir ces probabilités comme le fait de capturer des informations statistiques sur une situation bien précise, comme par exemple la proportion d'oiseaux qui volent dans un échantillon donné.

On peut jouer sur plusieurs variables : par exemple les trois formules $\omega_x(Fils(x,y))$, $\omega_y(Fils(x,y))$ et $\omega_{x,y}(Fils(x,y))$ n'ont pas la même signification. La première définit la proportion d'individus dont y est le fils, la seconde la proportion d'individus qui sont fils de x, et la troisième la probabilité qu'en prenant deux individus au hasard, le deuxième soit le fils du premier.

Définition 1 (Logique de probabilité du premier ordre sur le domaine).
Soit Φ un vocabulaire, c'est-à-dire une collection de symboles fonctionnels (dont éventuellement des constantes) et de symboles de prédicats, avec leurs arités.

Un terme objet *est un terme de la logique du premier ordre classique, c'est-à-dire qu'il appartient à la fermeture par applications des symboles fonctionnels sur l'ensemble des variables.*

Un terme de corps[1] *est un terme de la forme $\omega_{\vec{x}}(\varphi)$ où φ est une formule arbitraire et $\vec{x} =< x_1, \ldots, x_n >$ est un vecteur de variables; ou bien est un polynôme à coefficients rationnels sur de tels termes.*

Une formule atomique *est soit $P(t_1, \ldots, t_n)$ où P est un prédicat de Φ et $t_1, \ldots, t_n$ des termes objets, soit $t_1 = t_2$ ou $t_1 < t_2$ où t_1 et t_2 sont des termes de corps. On peut, ou non, autoriser l'égalité entre termes objets.*

Une formule *appartient à la fermeture par conjonction, négation et quantification universelle de l'ensemble des formules atomiques.*

On définit ainsi le langage $\mathcal{L}_1(\Phi)$ ($\mathcal{L}_1^=(\Phi)$ si on autorise les égalités entre termes objets).

On introduit également des probabilités conditionnelles $\omega_x(\varphi|\theta) = p$ qui sont en fait juste un raccourci d'écriture[2] pour les formules $\omega_x(\varphi \wedge \theta) = p \cdot \omega_x(\theta)$

Définition 2 (Structure de probabilité de type 1).
C'est un triplet $M = (D, \pi, \mu)$ où (D, π) est une structure standard de la logique du premier ordre, c'est à dire que D est un ensemble appelé domaine, et π est une application qui a tout symbole de Φ associe une interprétation sur le domaine D; μ est une mesure de probabilité sur D.

Pour interpréter les formules de la logique $\mathcal{L}_1(\Phi)$ sur la structure M avec la valuation v, on interprète les formules de la logique du premier ordre de façon classique, et on interprète $\omega_x(\varphi)$ comme $\mu(\{d \in D | (M, v[x/d]) \models \varphi\})$, où $v[x/d]$ représente la valuation qui prend les mêmes valeurs que v sauf en x où elle vaut d.

Exemple 1.1*:* On prend $\Phi = \{Fils\}$,
$D = \{a; b; c\}$,
π tel que $\pi(Fils) = \{(a, b)\} \subseteq D^2$,
μ telle que $\mu(a) = \frac{1}{3}$, $\mu(b) = \frac{1}{2}$ et $\mu(c) = \frac{1}{6}$.
Soit v la valuation telle que $v(x) = a$ et $v(y) = c$.

On a alors $(M, v) \models (\omega_x(Fils(x, y)) = 0)$,
$(M, v) \models (\omega_y(Fils(x, y)) = \frac{1}{2})$ et
$(M, v) \models (\omega_{x,y}(Fils(x, y)) = \frac{1}{6})$.

1.1.2 Probabilités sur des mondes possibles

Ici, on introduit des formules du type $\omega(\varphi)$ interprétée comme "la probabilité de φ". On a besoin de ceci quand on a affaire à des individus particuliers (par exemple l'individu $Tweety$), car si φ est une formule close (c'est-à-dire ne contenant pas de variables libres, par exemple la formule $Vole(Tweety)$), alors $(\omega_x(\varphi) = 0) \vee (\omega_x(\varphi) = 1)$ est vraie pour toute structure de probabilité de type 1. On veut plutôt au contraire introduire des degrés de croyance concernant ces individus bien précis. On a donc un ensemble de situations, chacune plus ou moins probable, et on considère quelle est la probabilité qu'on soit dans une situation favorable.

[1] *field term* en anglais, Halpern faisant probablement allusion aux corps réels clos qu'il utilise dans certaines de ses preuves
[2] En fait, ceci ne pose pas de problème dans le cadre de la logique introduite par Halpern dans [Hal89], mais il y en aura avec la logique contenant des approximations (cf. 1.2). Voir la discussion à ce sujet dans [GHK92, autour de l'exemple 2.2].

Définition 3 (Logique de probabilité du premier ordre sur des mondes possibles).
On reprend exactement la définition 1, sauf pour les termes de corps.

Un terme de corps *est un terme de la forme $\omega(\varphi)$ où φ est une formule arbitraire, ou bien un polynôme à coefficient rationnel sur un tel terme.*

On définit ainsi le langage $\mathcal{L}_2(\Phi)$ ($\mathcal{L}_2^=(\Phi)$ si on autorise les égalités entre termes objets).

Définition 4 (Structure de probabilité de type 2).
*C'est un quadruplet (D, S, π, μ) où S est un ensemble d'*états *ou de* mondes possibles*, π une application qui à tout monde $s \in S$ associe une interprétation de symboles de Φ de telle façon que $(D, \pi(s))$ soit une structure standard de la logique du premier ordre (cf. définition 2); μ est une mesure de probabilité sur S.*

Pour interpréter les formules de la logique $\mathcal{L}_2(\Phi)$ sur la structure M, dans le monde possible $s \in S$, avec la valuation v, on interprète les formules de la logique du premier ordre de façon classique dans $(D, \pi(s))$, et on interprète $\omega(\varphi)$ comme $\mu(\{s' \in S | (M, s', v) \vDash \varphi\})$.

Exemple 1.2*:* On prend $\Phi = \{A; Fils\}$,
$D = \{a; b\}$,
$S = \{1; 2; 3\}$;
$\forall s \in S\ \pi(s)(A) = a$, $\pi(1)(Fils) = \emptyset$, $\pi(2)(Fils) = \{(a, b)\}$ et $\pi(3)(Fils) = D^2$;
$\mu(1) = \frac{1}{6}$, $\mu(2) = \frac{1}{2}$ et $\mu(3) = \frac{1}{3}$.
Soit v la valuation telle que $v(x) = a$ et $v(y) = b$.

On a alors $(M, 1, v) \vDash (\omega(\forall y\ Fils(A, y)) = \frac{1}{6})$ et
$(M, 1, v) \vDash (\omega(Fils(A, y)) = \frac{5}{6})$.

1.1.3 Réunir les deux logiques

On veut pouvoir exprimer des phrases du type "La probabilité que Tweety vole est supérieure à celle qu'un oiseau quelconque vole". On combine les deux logiques, ce qui donne $\omega(Vole(Tweety)) \geqslant \omega_x(Vole(x))$. On peut également vouloir exprimer des degrés de croyance vis-à-vis de formules contenant elle même des faits statistiques. Par exemple, on peut vouloir exprimer que l'affirmation "la probabilité qu'un oiseau choisi au hasard vole est supérieur à 0,99" est très peu fiable, et que son degré de croyance est inférieur à 0,2, tandis que l'affirmation "la probabilité qu'un oiseau choisi au hasard vole est supérieur à 0,90" est bien plus probable, ce qui lui donne un degré de croyance supérieur à 0,95. On obtient alors la formule $\omega(\omega_x(Vole(x)|Oiseau(x)) > 0,99) < 0,2 \wedge \omega(\omega_x(Vole(x)|Oiseau(x)) > 0,90) > 0,95$.

Définition 5 (Logique de probabilités du premier ordre).
On réunit à la fois les définitions 1 et 3, c'est-à-dire qu'on permet à la fois les termes de corps de la forme $\omega_x(\varphi)$ et $\omega(\varphi)$.

On définit ainsi le langage $\mathcal{L}_3(\Phi)$ ($\mathcal{L}_3^=(\Phi)$ si on autorise les égalités entre termes).

Définition 6 (Structure de probabilité de type 3).
C'est un quintuplets $(D, S, \pi, \mu_D, \mu_S)$ où (D, S, π, μ_S) est une structure de probabilité de type 2, et $\forall s \in S$ $(D, \pi(s), \mu_D)$ est une structure de probabilité de type 1.

On interprète alors les formules de $\mathcal{L}_3(\Phi)$ dans la structure M, l'état $s \in S$ et la valuation v en utilisant le cas échéant les structures $(D, \pi(s), \mu_D)$ ou (D, S, π, μ_S).

1.2 Mondes possibles aléatoires et entropie maximum

On présente ici certains des résultats introduits dans [GHK92]

1.2.1 Degré de croyance

On s'intéresse ici à définir un degré de croyance que l'on peut attribuer à une formule φ connaissant une base de connaissances KB. On se place donc dans un cas particulier de la logique $\mathcal{L}_3(\Phi)$ définie en 1.1.3, dans lequel le domaine D est fini et vaut $\{1; \ldots; N\}$; on choisit pour S l'ensemble des interprétations possibles des symboles de Φ sur D, avec, pour $s \in S$, $\pi(s)$ correspondant à cette interprétation; pour μ_D (resp. μ_S) on choisit la probabilité uniforme sur D (resp. S).

De plus Halpern remplace l'égalité des probabilités par des approximations. Ainsi, on n'écrit plus la formule $\omega_x(\varphi(x)) = \frac{1}{2}$ mais $\omega_x(\varphi(x)) \approx_i \frac{1}{2}$, ce qui doit être lu "la probabilité qu'on ait $\varphi(x)$ pour un x pris au hasard est environ $\frac{1}{2}$ selon la i-ème approximation". Ceci permet d'éviter que la formule précédente ne puisse être vraie que dans des mondes de domaine pair. Les formules sont alors interprétées à l'aide d'un vecteur de tolérance $\vec{\tau}$, en remplaçant une formule telle que celle ci-dessus par $(\omega_x(\varphi(x)) \geqslant \frac{1}{2} - \tau_i) \wedge (\omega_x(\varphi(x)) \leqslant \frac{1}{2} + \tau_i)$.

On appelle alors $\mathcal{L}^{\approx}(\Phi)$ cette logique.

Pour plus de clarté je redéfini ici ce qu'on appelle dans ce cas un monde possible:

Définition 7 (Monde possible).
Un monde possible *sur le vocabulaire Φ et sur un domaine $D = \{1; \ldots; N\}$ est une application qui a tout symbole de fonction (resp. de prédicat) de Φ fait correspondre une fonction (resp. un prédicat) d'arité correspondante agissant sur D.*

Si S est l'ensemble des mondes possible, et si $\forall s \in S\ \pi(s) = s$, un monde possible satisfait la formule $\varphi \in \mathcal{L}^{\approx}(\Phi)$ au vecteur de tolérance $\vec{\tau}$ près ssi cette formule est valide dans la structure de probabilité de type 3 $(\{1; \ldots; N\}, S, \pi, \mu_D^{uniforme}, \mu_S^{uniforme})$.

On note $\#worlds_N^{\vec{\tau}}(\varphi)$ le nombre de mondes de taille N vérifiant φ au vecteur de tolérance $\vec{\tau}$ près.

Exemple 1.3*:* $\Phi = \{a, P\}$ avec a constante, P prédicat unaire. Sur $D = \{1; \ldots; N\}$ Il y a N façon de choisir l'interprétation de a, et 2^N façon de choisir celle de P ce qui donne en tout $N2^N$ mondes possibles.

On peut alors définir le degré de croyance:

Définition 8 (Degré de croyance).
Pour $\varphi, KB \in \mathcal{L}^{\approx}(\Phi)$, $N \in \mathbb{N}^*$, $\vec{\tau} \geqslant \vec{0}$ on définit

$$\Pr_N^{\vec{\tau}}(\varphi|KB) = \frac{\#worlds_N^{\vec{\tau}}(\varphi \wedge KB)}{\#worlds_N^{\vec{\tau}}(KB)} \qquad \textit{si } \#worlds_N^{\vec{\tau}}(KB) \neq 0$$

puis on définit

$$\Pr_\infty(\varphi|KB) = \lim_{\vec{\tau} \to \vec{0}} \lim_{N \to +\infty} \Pr_N^{\vec{\tau}}(\varphi|KB) \qquad \textit{si cette limite existe}$$

L'idée du degré de croyance à l'infini ($\Pr_\infty$) est qu'on a affaire à des statistiques, qui sont donc valables si on a un grand nombre de sujets ($N \to +\infty$) avec une tolérance d'erreur faible ($\vec{\tau} \to \vec{0}$).

Ce degré de croyance devient intéressant s'il n'est pas toujours égal à 0 ou à 1. Il sera discuté dans la section 3 à quelles conditions il en est ainsi.

Exemple 1.4*:* En reprenant l'exemple 1.3, la formule $P(a)$ est vraie dans la moitié des mondes, d'où, pour tout N, $\Pr_N(P(a)) = \frac{1}{2}$ et donc $\Pr_\infty(P(a)) = \frac{1}{2}$.

Contre-exemple 1.5*:* Ce degré de croyance n'est pas toujours défini:

$KB = \exists x_1, \ldots, x_k \forall x \bigvee_{j=1}^{k} x = x_j$ n'est vrai que dans des mondes de domaine de taille inférieure à k. $\Pr_N(KB|KB)$ n'est donc pas défini pour $N > k$.

Contre-exemple 1.6*:* De plus, même si $\Pr_N$ existe pour tout N, la limite n'existe pas forcément: on pose $\varphi_{pair} = (\forall x, y\ P(x,y) \Rightarrow P(y,x)) \wedge (\forall x \exists! y\ P(x,y)) \wedge (\forall x\ \neg P(x,x))$ et $\varphi_{impair} = (\forall x, y\ P(x,y) \Rightarrow P(y,x)) \wedge (\forall x \exists! y\ P(x,y)) \wedge (\exists! x\ P(x,x))$. φ_{pair} ne peut être vraie que dans les mondes de taille paire, et réciproquement pour φ_{impair}. On a donc $\Pr_N(\varphi_{pair}|\varphi_{pair} \vee \varphi_{impair})$ qui alterne entre 0 et 1.

Contre-exemple 1.7*:* Le problème de la limite peut également être dû à l'approximation. Ainsi si on prend la formule $KB = (\omega_x(P(x)) \preccurlyeq_1 0,3) \wedge (\omega_x(P(x)) \succcurlyeq_2 0,7)$, on peut montrer grâce à la technique présentée en 1.2.2 que si $\tau_1 < \tau_2$ alors $\Pr_N^{\vec{\tau}}(P(a)|KB) \xrightarrow[\substack{N \to +\infty \\ \vec{\tau} \to \vec{0}}]{} 0,3$, tandis qu'à l'inverse si $\tau_1 > \tau_2$ alors cette limite est 0,7, ce qui montre que $\Pr_\infty$ n'est pas bien définie.

1.2.2 Entropie maximum

Pour pouvoir calculer plus facilement $\Pr_\infty$, [GHK92] introduit une notion d'entropie sur les mondes possibles, et montre qu'on peut en quelque sorte se restreindre aux mondes d'entropie maximum pour calculer la limite.

Cette notion d'entropie n'est pourtant introduite que dans le cas où Φ ne contient que des constantes et des prédicats *unaires*. Cette restriction est justifiée d'une part par le fait que la façon dont elle est définie ne se généralise pas, et d'autre part du fait de l'indécidabilité du calcul de $\Pr_\infty$ dans le cas non unaire (cf. 1.3), la définition de l'entropie amenant une façon de calculer cette limite.

Dans la suite, on notera $\mathcal{P} = \{P_1; \ldots; P_k\}$ l'ensemble des prédicats unaires de Φ. On appelle un *atome* sur $\mathcal{P}$ une conjonction de la forme $P'_1(x) \wedge \cdots \wedge P'_k(x)$ où chaque P'_i est soit P_i soit $\neg P_i$. Il y a donc $K = 2^k$ atomes possibles sur $\mathcal{P}$. On notera dans la suite $A_1, \ldots, A_K$ ces atomes.

Exemple 1.8*:* Il y a 4 atomes sur $\mathcal{P} = \{P_1; P_2\}$: $A_1 = P_1 \wedge P_2$, $A_2 = P_1 \wedge \neg P_2$, $A_3 = \neg P_1 \wedge P_2$, $A_4 = \neg P_1 \wedge \neg P_2$.

On peut alors montrer que toute formule peut se mettre sous une forme canonique:

Théorème 1 (Forme canonique [GHK92, Théorème 3.5]**).**
Toute formule close peut se mettre sous la forme d'une disjonction de conjonctions, où chacun des termes dans les conjonctions est d'une de ces formes:
- $t = 0$, $(t > 0) \wedge (t \leqslant \tau_i\, t')$, *ou* $(t > 0) \wedge \neg\, (t \leqslant \tau_i\, t')$
- $\exists x\ A(x)$ *ou* $\neg \exists x\ A(x)$
- $A(c)$ *pour une certaine constante* c.

où A *est un atome sur* $\mathcal{P}$ *et* t *et* t' *sont des polynômes sur des termes de la forme* $\omega_x(A(x))$.

On peut alors définir l'entropie:

Définition 9 (Entropie).
Soit un monde possible W*, on définit le* point associé *à* W*, noté* $\pi(W)$*, comme l'interprétation dans* W *de* $(\omega_x(A_1(x)), \ldots, \omega_x(A_K(x)))$.

*On définit l'*entropie *d'un monde* W *comme l'entropie de son point, i.e. si* $\pi(W) = (u_1, \ldots, u_K)$*, alors* $H(W) = -\sum_{i=1}^{K} u_i \ln(u_i)$.

Il faut en fait voir l'entropie comme la quantité d'informations que possède un monde. Plus son entropie est élevée, moins le monde contient de contraintes. On peut alors montrer (cf. [GHK92, Lemme 3.11]) que les mondes vérifiant une certaine base de connaissance sont concentrés autour du point d'entropie maximum permettant cette contrainte. Si on note $\#worlds_N^{\vec{\tau}}[\mathcal{S}](\varphi)$ le nombre de mondes de taille N vérifiant φ au vecteur de tolérance $\vec{\tau}$ près, et dont le point associé est dans l'ensemble $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^K$, on peut en déduire

Théorème 2 (Restriction aux mondes d'entropie maximum [GHK92, Théorème 3.13]**).**
Pour $\vec{\tau}$ *suffisamment petit, soit* $\mathcal{Q}$ *les points d'entropie maximum des mondes vérifiant* KB*, et soit* $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^K$ *un ouvert contenant* $\mathcal{Q}$*. Alors pour toute formule* θ

$$\lim_{N \to +\infty} \Pr_N^{\vec{\tau}}(\theta | KB) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\#worlds_N^{\vec{\tau}}[\mathcal{O}](\theta \wedge KB)}{\#worlds_N^{\vec{\tau}}[\mathcal{O}](KB)}$$

Autrement dit on peut se restreindre aux mondes d'entropie maximum pour calculer le degré de croyance à l'infini. Pour comprendre l'intérêt de ce théorème, le mieux est de regarder un exemple:

Exemple 1.9 *(Hépatite):* On se place sur $\Phi = \{E, H, J, B\}$, E étant une constante représentant Éric et les autres symboles des prédicats unaires, représentant respectivement avoir l'hépatite, avoir la jaunisse et avoir les yeux bleus.

On considère la base de connaissance

$$\begin{aligned} KB_{hep} = \quad & \forall x\ H(x) \Rightarrow J(x) \wedge \\ & \omega_x(H(x)|J(x)) \approx_1 0{,}8 \wedge \\ & \omega_x(B(x)) \approx_2 0{,}25 \wedge \\ & J(E) \end{aligned}$$

On ordonne les atomes sur $\mathcal{P}$ dans l'ordre suivant: A_{HJB}, $A_{HJ\bar{B}}$, $A_{H\bar{J}B}$, $A_{H\bar{J}\bar{B}}$, $A_{\bar{H}JB}$, $A_{\bar{H}J\bar{B}}$, $A_{\bar{H}\bar{J}B}$, $A_{\bar{H}\bar{J}\bar{B}}$.

Si W est un monde vérifiant KB_{hep}, et si $\pi(W) = (u_1, \ldots, u_8)$, on voit alors que les u_i doivent vérifier:

$$\begin{array}{rcl}
u_3 & = & 0 \\
u_4 & = & 0 \\
(u_1+u_2) & \leqslant & (0,8+\tau_1)(u_1+u_2+u_5+u_6) \\
(u_1+u_2) & \geqslant & (0,8-\tau_1)(u_1+u_2+u_5+u_6) \\
(u_1+u_3+u_5+u_7) & \leqslant & (0,25+\tau_2) \\
(u_1+u_3+u_5+u_7) & \geqslant & (0,25-\tau_2) \\
(u_1+u_2+u_5+u_6) & > & 0
\end{array}$$

Même si je ne détaille pas ici le calcul[3], on voit bien d'où proviennent ces équations à partir de la base de connaissance.

On cherche ensuite le point d'entropie maximum avec $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Il vaut, en posant $\gamma = 2^{1,6}$, $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8) = (\frac{1}{5+\gamma}, \frac{3}{5+\gamma}, 0, 0, \frac{1}{4(5+\gamma)}, \frac{3}{4(5+\gamma)}, \frac{\gamma}{4(5+\gamma)}, \frac{3\gamma}{4(5+\gamma)})$

On peut alors se restreindre au point d'entropie maximum, ce qui permet de la calculer effectivement sans avoir à regarder tous les mondes possibles. Il vaut alors[4]:

$$\begin{aligned}
\Pr_\infty(H(E)|KB_{hep}) &= \frac{v_1+v_2}{v_1+v_2+v_5+v_6} \\
&= \frac{\frac{1}{5+\gamma}+\frac{3}{5+\gamma}}{\frac{1}{5+\gamma}+\frac{3}{5+\gamma}+\frac{1}{4(5+\gamma)}+\frac{3}{4(5+\gamma)}} \\
&= 0,8
\end{aligned}$$

On obtient le résultat attendu, à savoir que comme on a pas d'informations supplémentaires sur Éric hormis le fait qu'il a la jaunisse, et comme le fait d'avoir les yeux bleus est indépendant d'avoir l'hépatite, Éric est un patient type et la probabilité qu'il ait l'hépatite est égale à la statistique. On peut trouver que cette technique est bien compliquée pour arriver à un résultat qu'on aurait pu obtenir, facilement dans ce cas, en comptant effectivement tous les mondes possibles, mais elle a l'avantage d'être suffisamment générale pour s'appliquer en pratique à de nombreux cas.

1.3 Indécidabilité du calcul de la limite $\Pr_\infty$

Dans [AH94], des résultats concernant l'indécidabilité de la logique du premier ordre des probabilités sont démontrés. Néanmoins il s'agit de résultats concernant les domaines infinis. Il est notamment démontré que l'ensemble des formules valides des logiques $\mathcal{L}_1(\Phi)$ et $\mathcal{L}_2(\Phi)$ (cf. sections 1.1.1 et 1.1.2), n'est dans le cas général pas récursivement énumérable (et donc que ces logiques ne sont pas axiomatisables). Néanmoins il est démontré que dans le cas où la taille du domaine est borné (ou dans le cas où on a affaire qu'à des prédicats unaires pour $\mathcal{L}_1(\Phi)$), le problème de validité sur ces logiques est décidable.

Concernant le degré de croyance à l'infini, des résultats d'indécidabilité sont démontrés dans [GHK96b].

Théorème 3 (Résultats d'indécidabilité [GHK96b, Section 4]**).**
Dans le cas où il y a au moins un prédicat non unaire dans Φ et où on permet l'égalité entre termes[5], alors il est hautement[6] indécidable de savoir si:

- *une formule est satisfiable pour un nombre infini de taille de domaine*
- *une formule n'est pas satisfiable sur un nombre fini de domaine*
- *la limite $\Pr_\infty$ existe, sachant qu'on peut la définir*
- *la limite $\Pr_\infty$ est dans un intervalle fermé non trivial de $[0,1]$, sachant que cette limite existe*

[3]Il faut en fait passer par la forme canonique du théorème 1, d'où on déduit facilement les conditions sur les u_i, cf. [GHK92] pour plus de détails

[4]Là encore les calculs sont loin d'être détaillés, j'essaie uniquement de donner un exemple de ce que peut donner l'utilisation de l'entropie pour le calcul du degré de croyance à l'infini. D'autres restrictions interviennent en fait, et d'autres notions devraient être définies. Le lecteur intéressé pourra trouver tous ces détails dans [GHK92]

[5]ou dans le cas où on a pas l'égalité mais il y a trois prédicats non unaires

[6]en fait il est montré que ces problèmes sont respectivement Π_2^0-, Σ_2^0-, Π_3^0-, Π_2^0-complets

Démonstration. Pour montrer ces résultats, Halpern utilise une formule logique θ_M dont l'interprétation dans des mondes de domaine fini correspond au diagramme espace temps borné d'une certaine machine de Turing M. □

Remarque: Si on se contente des langages dans lesquelles les formules ont une profondeur de quantification bornée, alors ces quatre problèmes sont décidables, et ce en temps linéaire par rapport à la longueur des formules (cf. [GHK96b, Section 5]).

2 Logique équationnelle et probabilités

2.1 Quelques résultats de la logique équationnelle

Je vais ici faire quelques rappels concernant la logique équationnelle. La logique équationnelle est une restriction de la logique du premier ordre dans laquelle il n'y a pas d'autre prédicat que l'égalité, il n'y a pas de quantifieur existentiel ni de négation ni de disjonctions. Dans la pratique, la logique équationnelle consiste en des égalités entre termes, les termes étant construits à partir des symboles fonctionnels (les constantes sont vues comme des fonctions d'arité 0) d'une signature Σ, ainsi que de variables d'un ensemble infini dénombrable V. On note l'ensemble des termes $\mathcal{T}(\Sigma, V)$.

Exemple 2.1 *(Groupes):* L'axiomatique des groupes est un bon exemple de logique équationnelle. On considère la signature $\Sigma = \{e; i; f\}$ et l'ensemble d'équations $E = \{f(x, f(y, z)) \approx f(f(x, y), z); f(e, x) \approx x; f(i(x), x) \approx e\}$.

Dans la logique du premier ordre, ceci serait équivalent à se placer sur le vocabulaire $\Phi = \{e; i; f; =\}$ et à regarder la formule $(\forall xyz\ f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)) \wedge (\forall x\ f(e, x) = x) \wedge (\forall x\ f(i(x), x) = e)$

On interprète les formules à l'aide d'algèbres, qui correspondent aux structures standards de la logique du premier ordre

Définition 10 (Algèbre, modèle).
Soit Σ une signature, une Σ-algèbre $\mathcal{A}$ est

- *un domaine A*
- *une application qui à tout symbole de Σ d'arité n fait correspondre une fonction de A^n vers A.*

Une égalité $s \approx t$ est valide dans l'algèbre $\mathcal{A}$ ssi pour tout morphisme φ de $\mathcal{T}(\Sigma, V)$ vers $\mathcal{A}$ (c'est à dire toute application bien définie vis à vis des interprétations des symboles fonctionnels), on a $\varphi(s) = \varphi(t)$.

Un modèle d'un ensemble d'équations E est une algèbre dans laquelle toutes ces équations sont valides.

Un théorème important du à Birkhoff relie réécriture et validité dans des modèles:

Théorème 4 (Birkhoff).
Les relations suivantes coïncident:

- *la théorie équationnelle induite par E: $\approx_E$, c'est-à-dire l'ensemble des égalités valides dans tout modèle de E*
- *les identités valides dans l'algèbre libre $\mathcal{T}(\Sigma, V)_{/E}$ définie comme l'algèbre des termes quotientée par la relation de congruence $\approx_E$ (voir point précédent)*
- *la relation de conséquence syntactique $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$, c'est-à-dire la clôture réflexive symétrique transitive de la relation de réduction associée à E*
- *les égalités dont on peut donner une preuve dans la logique équationnelle*

En d'autres termes, $\vdash$ et $\models$ coïncident.

Démonstration. Cf. [BN98, Chapitre 3] □

2.2 Σ-algèbres et mondes possibles

Je vais traiter dans cette partie de quelques questions qui ont été soulevées au moment d'appliquer les probabilités à la Halpern à la logique équationnelle.

2.2.1 Relation d'équivalence ou égalité sur le domaine?

La première de ces questions consiste à savoir s'il faut considérer l'égalité comme un prédicat binaire comme un autre, ou comme l'égalité du monde possible. Trois raisons me font penser qu'il faut plutôt préférer la seconde solution:

- l'égalité est loin d'être un prédicat binaire comme les autres, car non seulement c'est une relation d'équivalence, mais elle doit aussi être compatible avec les interprétations des autres fonctions: par exemple, si $s \approx t$ alors $f(s) \approx f(t)$ donc si on prend deux éléments d'une classe de l'interprétation de $\approx$, leurs images par l'interprétation de f doivent être dans la même classe.
- l'interprétation du symbole $\approx$ comme l'égalité du monde possible conduit naturellement à identifier les mondes possibles de taille N aux algèbres dont le domaine est de cardinal N. En effet, c'est uniquement la donnée des interprétations des symboles fonctionnels qui caractérise une algèbre, et la définition de la validité d'une équation dans une algèbre correspond alors bien à celle de la validité de la formule correspondante dans le monde possible.
- Halpern lui-même, quand il définit ses logiques dans [Hal89], réserve un cas particulier à l'égalité et ne l'interprète pas autrement que comme l'égalité sur le monde.[7]

Les deux méthodes laissent présager des résultats très différents:

Exemple 2.2 *(Groupes commutatifs):* On considère les axiomes des groupes (cf. exemple 2.1), et on rajoute l'équation de commutativité $f(x,y) \approx f(y,x)$. Soit $p > 6$ un nombre premier.

Si on se place dans le cadre de l'égalité sur le domaine, alors tout groupe de cardinal p est commutatif, donc $\Pr_p(f(x,y) \approx f(y,x)|E) = 1$.

Si on se place dans le cadre de l'interprétation du symbole $\approx$, on peut imaginer une interprétation de l'identité en 6 classes d'équivalence, et l'interprétation de e, i et f de telle façon à avoir $\mathfrak{S}_3$[8]. On a donc un monde possible où f n'est pas commutative, d'où $\Pr_p(f(x,y) \approx f(y,x)|E) < 1$.

2.2.2 Mondes possibles ou structure

Ce problème fait alors penser à un autre, déjà mis en avant par Halpern dans [GHK96b]. Il s'agit de savoir si on doit considérer tous les mondes possibles de la même façon, ou si l'on doit considérer que les mondes isomorphes sont égaux et ne doivent donc être compté qu'une fois. On parle alors dans le deuxième cas de *structures* et non plus de monde.

Le fait est que dans la logique équationnelle, il est naturel de considérer les algèbres isomorphes comme égale. On a tendance, par exemple, à compter les groupes à isomorphisme près. Toutefois cette approche possède certains inconvénients: en effet, dans le cas des mondes possibles, on peut montrer que $\Pr_N$ est indépendant du vocabulaire Φ, ce qui est dû au fait que si on prend $\Phi' \supseteq \Phi$, le nombre de mondes avec le vocabulaire Φ' satisfiant une formule φ sera égal à celui avec le vocabulaire Φ à une constante près indépendante de φ, qui s'annule dans le rapport dans le rapport $\Pr_N$.

Contre-exemple 2.3*:* Ceci n'est pas vrai dans le cas des structures: Soit un prédicat P, $\theta = \exists! x\ P(x) \vee \neg\exists x\ P(x)$ et $\varphi = \exists x\ P(x)$.

Pour $\Phi = \{P\}$, on a alors $\Pr_N^{struct,\Phi}(\varphi|\theta) = \dfrac{1}{2}$.

Pour $\Phi' = \{P, Q\}$ on a alors $\Pr_N^{struct,\Phi'}(\varphi|\theta) = \dfrac{2N}{3N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{2}{3}$

Remarque: $\Pr_N^{mondes}(\varphi|\theta) = \dfrac{N}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$, ce qui montre qu'il n'y a à priori aucun rapport entre les deux.

Contre-exemple 2.4*:* Même dans le cadre de la logique équationnelle, ceci reste faux.

Pour $\Phi = \{a; b\}$, on a $\Pr_N^{struct,\{a;b\}}(a \approx b) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$: soit $a = b$ dans la structure, soit $a \neq b$.

Pour $\Phi = \{a; b; c\}$, on a $\Pr_N^{struct,\{a;b;c\}}(a \approx b) = \frac{2}{5} \to \frac{2}{5}$: on a les cas suivants:

[7] Une quatrième raison serait que les calculs semblent plus naturels avec l'égalité sur le domaine

[8] le groupe des permutations sur un ensemble de cardinal 3, le plus petit groupe non commutatif, qui est de cardinal 6

$$\begin{array}{lllllll} a & = & b & = & c & \surd \\ a & = & b & \neq & c & \surd \\ a & \neq & b & = & c & \\ a & = & c & \neq & b & \\ a & \neq & b & \neq & c & \end{array}$$

Dans le cadre des mondes possibles, on a $\Pr_N^{mondes}(a \approx b) = \frac{1}{N} \to 0$: une fois choisie l'interprétation de a, on a un seul choix valide sur N pour l'interprétation de b.

Toutefois on peut faire un lien entre les deux notions, même si la proposition suivante ne peut s'appliquer de façon directe dans le cadre de la logique équationnelle:

Proposition 5. *[GHK96b, Proposition 2.6] Si Φ contient au moins un prédicat non unaire qui n'apparaît pas dans θ, alors* $\Pr_\infty^{struct,\Phi}(\varphi|\theta) = \Pr_\infty^{mondes}(\varphi|\theta)$

Démonstration. Voir le corollaire 2.10 de [GHK96a]. □

2.2.3 Algèbre libre et entropie maximum

Comme le montre le théorème 4, l'algèbre libre $\mathcal{T}(\Sigma, V)_{/E}$ joue un rôle particulier parmi les modèles de E. On peut alors être tenté de voir une analogie entre $\mathcal{T}(\Sigma, V)_{/E}$ et les mondes d'entropie maximum.

En effet, une formule est valide dans toute algèbre de la variété définie par E ssi elle est valide dans l'algèbre libre. D'un autre côté, une formule a un degré de croyance à l'infini p ssi elle a un degré de croyance restreint aux mondes d'entropie maximum p. Toutefois l'analogie ne semble pas pouvoir être poursuivie, car il semble difficile de définir une *entropie* sur les algèbres de manière à ce que l'algèbre libre soit celle d'entropie maximum. Le problème est notamment dû au fait que si $\approx_E$ n'est pas trivial[9], alors $\mathcal{T}(\Sigma, V)_{/E}$ est de cardinal infini, alors que l'entropie n'est définie par Halpern que dans les mondes finis. Un autre problème serait de trouver l'équivalent des atomes et du théorème 1.

On peut toutefois tenter d'introduire une fonction qu'on pourrait appeler entropie et qui possède des propriétés intéressantes.

Proposition 6. *On se place sur une signature $\Sigma = \{f_1; \ldots; f_n\}$. Soit E un ensemble d'équations sur Σ. Il existe une fonction H_E qui à tout modèle de E associe un réel et qui vérifie les propriétés suivantes :*
- *H_E est définie pour tout modèle de E*
- *H_E est maximale pour l'algèbre triviale*
- *H_E est minimale pour l'algèbre libre*

Démonstration. Soit $s, t \in \mathcal{T}(\Sigma, V)$, et soit $\mathcal{A}$ un modèle de E, on considère la fonction
$\chi_{\mathcal{A}}(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si on a pas } s \approx_E t \text{ mais } s = t \text{ dans le modèle } \mathcal{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On note $|s|$ le nombre de symboles dans s. On définit ensuite la fonction $H_E(\mathcal{A}) = \sum_{(s,t)\in\mathcal{T}(\Sigma,V)} \frac{\chi_{\mathcal{A}}(s,t)}{(2n)^{|s|+|t|}}$.

Cette fonction est définie pour tout modèle de E, minimale pour l'algèbre libre, elle est maximale pour l'algèbre triviale. □

Cette fonction mesure donc en quelque sorte combien le modèle $\mathcal{A}$ est un modèle spécifique de l'ensemble d'équations E. Malgré tout, tous les termes n'ont pas le même poids dans cette entropie, mais on a ici privilégié les termes comportant peu de symboles fonctionnels, sachant que si ceux-ci joue un rôle dans l'entropie, les termes dont ils sont des sous-termes joueront un rôle également.

Remarque: Cette fonction n'est pas calculable, car elle vaut 0 pour l'algèbre triviale (celle de cardinal 1) ssi l'ensemble E est trivial, ce qui contredirait le théorème 7.

[9] i.e. si l'ensemble des équations valides n'est pas $\mathcal{T}(\Sigma, V) \times \mathcal{T}(\Sigma, V)$

2.3 Application de la méthode des mondes possibles à la logique équationnelle

Je me place dorénavant dans le cadre des mondes possibles, avec pour interprétation de l'égalité celle du domaine.

La logique équationnelle étant une restriction de la logique du premier ordre, on peut bien sûr définir des équations avec des probabilités comme l'a fait Halpern. On peut aussi calculer le degré de croyance des équations. Par contre on ne peut pas appliquer la méthode de l'entropie maximum, puisqu'on a affaire à des symboles fonctionnels et non des prédicats unaires.

2.3.1 Existence de la limite

On peut se demander si la limite de $\Pr_N$ est toujours définie dans ce cas.

Contre-exemple 2.5*:* Pour certaines équations, il n'existe pas de modèles pour tout N. C'est notamment le cas quand $\approx_E$ est trivial, puisqu'alors les seuls modèles de E ont un cardinal 1 (cf. [BN98, Lemme 3.5.5]).

On peut par exemple considérer l'ensemble $E = \{x \approx \top\}$ sur la signature $\Sigma = \{\top\}$. Tous les éléments du domaine doivent être égaux à celui qui est l'interprétation de $\top$, donc il n'y a qu'un élément dans le domaine. En fait, un ensemble d'équations est trivial ssi on peut déduire l'équation $x \approx y$ pour deux variables x et y.

Contre-exemple 2.6 *(groupes non commutatifs):* Il existe aussi des ensembles d'équations pour lesquels ils existe des modèles pour une infinité de N, mais il existe aussi une infinité de N pour lesquels il n'y a pas de modèles.

On prend $E = \{Eq(x,x) \approx \top; C(\top,x) \approx x; f(x,f(y,z)) \approx f(f(x,y),z); f(e,x) \approx x; f(i(x),x) \approx e; C(Eq(f(a,b),f(b,a)),x) \approx \top\}$[10] sur la signature $\Sigma = \{\top; e; a; b; i; f; Eq; C\}$.

Pour tout $N \geqslant 3$ il existe un modèle de E de taille $N!$, celui correspondant à $\mathfrak{S}_N$, avec pour a et b deux éléments qui ne commutent pas.

Pour tout $p > 2$ premier, il n'existe pas de modèles de E de taille p, puisque tous les groupes de cardinal p sont isomorphes à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et sont donc commutatifs.

Contre-exemple 2.7*:* De plus, si on reprend l'exemple 2.2 des groupes commutatifs, on peut se demander, même si on trouve un modèle de $E \cup \{f(x,y) \approx f(y,x)\}$ pour tout N (prendre par exemple $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$), si la limite existe bien. Je ne m'y connais pas suffisamment en théorie des groupes pour pouvoir l'affirmer avec certitude, mais il me semble qu'il existe une infinité de N pour lesquels la proportion de groupes commutatifs par rapport aux groupes d'ordre N est très faible, c'est-à-dire par exemple inférieure à $\frac{3}{4}$. Si cela est vrai, alors la limite $\Pr_\infty(f(x,y) \approx f(y,x)|E)$ n'est pas bien définie.

2.3.2 Indécidabilité du calcul de $\Pr_\infty$?

On peut alors se demander si le calcul du degré de croyance à l'infini reste toujours indécidable, puisque la preuve de son indécidabilité fait intervenir des formules qui ne peuvent pas être transcrite en logique équationnelle. Toutefois, les résultats d'indécidabilité de [BH03] concernant l'ajout de probabilité en réécriture semblent laisser croire que ce calcul reste indécidable.

Conjecture* 1 *(Indécidabilité du calcul de* $\Pr_\infty$ *en logique équationnelle).
Il est indécidable de savoir, étant donnés un ensemble d'égalités E et une équation $s \approx t$, si

- *il existe un nombre infini de N pour lesquels il existe un modèle de E*
- *$\Pr_\infty(s \approx t|E)$ est dans un intervalle fermé non trivial*

J'ai donc essayé de transposer la preuve d'indécidabilité de Halpern, en essayant d'écrire un ensemble d'équations dont les modèles seraient les description du diagramme espace temps borné d'une machine de Turing. Toutefois, si on peut parvenir à exprimer plus que des simples équations entre termes, je ne suis pas parvenu à décrire de manière complète un tel ensemble.

En particulier, si on considère une algèbre non triviale (c'est à dire de cardinal > 1), alors on peut exprimer des *inégalités*.

[10] voir 2.3.2 pour savoir quelle est l'idée derrière les équations faisant intervenir Eq, C et $\top$. On veut en fait exprimer $f(a,b) \not\approx f(b,a)$

En effet, pour $s, t \in \mathcal{T}(\Sigma, V)$, si on rajoute, avec des symboles fonctionnels $Eq, C, \top$ frais, les équations $Eq(x,x) \approx \top$ et $C(\top, x) \approx x$, il suffit, pour exprimer $s \not\approx t$ d'écrire l'équation $C(Eq(s,t), x) \approx \top$, où x est une variable fraîche par rapport aux deux termes s et t.

Alors, si on pouvait déduire $s \approx t$, $Eq(s,t)$ serait égal à $\top$, donc $C(Eq(s,t), x)$ serait égal à x. On aurait donc $x \approx \top$, or ceci rendrait l'ensemble d'équations triviales, donc le modèle serait de cardinal 1.

De la même façon on peut définir certaines implications:
$s \approx t \Rightarrow u \approx v$ avec $C(Eq(s,t), u) \approx C(Eq(s,t), v)$
$s \approx t \Rightarrow u \not\approx v$ avec $C(Eq(C(Eq(s,t), u), v), x) \approx \top$
$s \not\approx t \Rightarrow u \not\approx v$ avec $C(Eq(u,v), s) \approx C(Eq(u,v), t)$
Par contre je ne crois que l'on puisse exprimer une implication du type $s \not\approx t \Rightarrow u \approx v$, et par conséquent on ne peut pas exprimer des propriétés comme $B(x) \approx \top \vee B(x) \approx \bot$, c'est-à-dire créer de véritables prédicats.

L'idée de départ était en effet d'écrire un ensemble d'équations qui permettent de décrire le fonctionnement d'une machine de Turing, où plus simplement celui d'un automate cellulaire à entrée bornée. Pour cela, on utilise des symboles désignant les successeur et prédécesseur sur le ruban ou le successeur temporel, notés $H_d(x)$, $H_g(x)$ et $V(x)$ par exemple. On définit l'état de x à l'aide de $q(x)$. On définit les transitions $t(q_1, q_2, q_3) \approx q'$. Puis on écrit le fonctionnement même de l'automate: $q(V(x)) \approx t(q(H_g(x)), q(x), q(H_d(x)))$.

Mais on veut avoir des descriptions bornées du fonctionnement de l'automate, on a donc besoin de définir un certain prédicat $B(x)$ qui dit si x est sur le bord de la description, et n'a donc pas de successeur temporel, ce qui est d'après moi impossible à exprimer.

Cette idée m'a permis toutefois de montrer le théorème suivant, dont on trouvera la preuve en annexe A.

Théorème 7 (Indécidabilité de la trivialité).
Le problème de décider, à partir de la donnée d'une signature Σ et d'un ensemble d'égalités E sur les termes de $\mathcal{T}(\Sigma, V)$, si $\approx_E$ est trivial, est récursivement énumérable complet.

3 Lois 0-1

Le degré de croyance tel que le définit Halpern n'est réellement intéressant que s'il est non trivial, c'est-à-dire s'il ne tend pas toujours vers 0 ou vers 1. Pourtant, si on se restreint à une certaine logique (en l'occurrence celle où on ne considère que des prédicats, sans constante, et sans conditionner), alors on a ce phénomène de convergence vers 0 ou 1. Et il semblerait que pour la logique équationnelle, si on ne permet pas les conditions, il en soit de même. Il sera donc question dans cette partie de savoir quelles conditions on doit donner à une logique pour que ses degrés de croyance ne soient pas triviaux.

3.1 Cas de la logique purement relationnelle

C'est Glebskiĭ et al. en 1969 et parallèlement Fagin en 1976 qui ont les premiers introduits la loi 0-1:

Théorème 8 (Loi 0-1 [Fag76, Théorème 4]**).**
Si φ est une formule close d'un langage purement relationnel, alors $\mathrm{Pr}_N(\varphi)$ converge vers 0 ou 1.

Démonstration. La démonstration utilise le fait qu'il existe une théorie complète T (c'est-à-dire pour laquelle on peut prouver toute formule ou sa négation), et que si $T \vdash \varphi$ alors $\mathrm{Pr}_N(\varphi) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$. □

3.2 Contre-exemples

La loi 0-1 est vrai uniquement pour les formules purement relationnelles de la logique du premier ordre. Je vais maintenant donner quelques contre-exemples qui montre pourquoi elle ne peut pas être étendue à d'autres logiques. Les contre-exemples généraux concernant les logiques du premier et deuxième ordre sont tirés de [Fag76].

Contre-exemple 3.1*:* Il n'y a pas de loi 0-1 si il y a des symboles de fonction:

$$\mathrm{Pr}_N(\forall x f(x) \neq x) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{e}$$

Contre-exemple 3.2*:* s'il y a des constantes:

$$\forall N \quad \mathrm{Pr}_N(P(a)) = \frac{1}{2}$$

Contre-exemple 3.3*:* si on se place dans la logique du deuxième ordre:

$$\mathrm{Pr}_N(\exists P\ \forall x \exists ! y\ (x \neq y \wedge P(x,y) \wedge P(y,x))) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$$

(cf. également contre-exemple 1.6)

Contre-exemple 3.4*:* ou s'il y a des conditions:

$$\theta = \forall x \exists ! y\ R(x,y) \quad \varphi = \forall x \neg R(x,x) \quad \mathrm{Pr}_N(\varphi|\theta) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{e}$$

Contre-exemple 3.5*:* et ce, même en se restreignant à la logique équationnelle sur les termes clos:

$$\mathrm{Pr}_N(s(a) \approx a | s(s(a)) \approx a) = \frac{N}{2N-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

En fait j'ai établi qu'on pouvait obtenir n'importe rationnel:

Proposition 9 (Convergence). *Si Σ contient au moins une constante a et une fonction f d'arité > 0, et si $p \in \mathbb{N}$ est premier, alors*

$$\forall \frac{n}{d} \in \mathbb{Q} \cap]0,1]\ \mathrm{Pr}_N(f^{p^{n-1}}(a) \approx a | f^{p^{d-1}}(a) \approx a) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{n}{d}$$

Démonstration. En fait on peut montrer un résultat plus fort: si $n \in \mathbb{N}$, le nombre de monde sur la signature $\{a; f\}$ qui vérifie $f^n(a) \approx a$ est équivalent quand $N \to \infty$ à kN^N, où k est le nombre de diviseur de n.

Pour cela, on prend $N > n$. Il suffit de remarquer que la suite $a, f(a), \ldots, f^n(a), \ldots$ est interprétée sur un domaine fini, donc comporte forcément une boucle. Pour que $f^n(a) = a$ il faut que cette boucle comporte a, c'est à dire que le plus petit i tel que $\exists j < i\ f^j(a) = f^i(a)$ soit tel que $f^i(a) = a$, et il faut aussi que i soit un diviseur de n, afin de bien revenir sur a pour $f^n(a)$. Dans ce cas on doit fixer a, $f(a)$, $\ldots$, $f^{i-1}(a)$ tous de manière différente, puis associer $f^i(a)$ à a, et interpréter f sur le domaine restant de toutes les façons possibles. On a donc $N(N-1)\cdots(N-(i-1)) \cdot 1 \cdot N^{N-i}$ mondes possibles. En tout il y a donc $\sum_{d|n} N(N-1)\cdots(N-(d-1))N^{N-d} \sim |\{d \in \mathbb{N}^* \mid d|n\}|\, N^N$ mondes de taille N vérifiant $f^n(a) \approx a$.

Pour prouver cette proposition il s'agit ensuite de remarquer que $f^{p^{d-1}}(a) \approx a$ implique $f^{p^{n-1}}(a) \approx a$ si $n \leqslant d$. Le nombre de monde de taille vérifiant $\{f^{p^{d-1}}(a) \approx a; f^{p^{n-1}}(a) \approx a\}$ est donc celui des mondes vérifiant uniquement $f^{p^{d-1}}(a) \approx a$ □

3.3 Conditions pour une loi 0-1 dans le cas équationnel?

Pourtant, dans le cas équationnel sans conditions, aucun contre-exemple évident ne va à l'encontre d'une loi 0-1. Malgré tout, une preuve de cette loi ne semble pas triviale. C'est pourquoi on est tenté de s'occuper de cas encore plus restreints.

3.3.1 Termes clos: Borne inférieure

Dans le cas où on ne s'occupe que des termes clos (c'est-à-dire sans variables), il existe toujours des modèles de E, ce qui m'a permis d'établir une borne inférieure pour Pr_N:

Proposition 10 (Borne inférieure). *Si E est un ensemble fini d'équations entre termes clos de la logique équationnelle sur la signature $\Sigma = \{f_1, \ldots, f_n\}$, alors*

$$\mathrm{Pr}_N(E) \geqslant \frac{1}{N^{n-1}}$$

De plus, si Σ possède une constante, cette borne peut être atteinte.

Démonstration. Soit $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ les arités des symboles $f_1, \ldots, f_n$.

Pour un domaine de taille N, on construit explicitement $N \prod_{j=1}^{n} N^{N^{i_j}-1}$ mondes dans lesquelles l'ensemble d'équations E est vrai:

on choisit un élément x du domaine parmi N, on interprète les constantes comme cet élément, puis on interprète les fonctions d'arité k de toutes les façons possibles, sauf en $(x, \ldots, x)$ auquel on associe x. Il y a donc N^{N^k-1} façons possibles (vrai aussi pour les constantes). Au final on a donc construit $N \prod_{j=1}^{n} N^{N^{i_j}-1}$ mondes dans lesquels l'ensemble des équations E est vrai, puisque que, chacun de ses termes étant clos, il sera par conséquent interprété dans chacun de ces mondes comme x. Il y a $\prod_{j=1}^{n} N^{N^{i_j}}$ mondes possibles en tout.

On a donc $\mathrm{Pr}_N(E) \geqslant \dfrac{N \prod_{j=1}^{n} N^{N^{i_j}-1}}{\prod_{j=1}^{n} N^{N^{i_j}}} = \dfrac{N}{\prod_{j=1}^{n} N} = \dfrac{1}{N^{n-1}}$

Pour atteindre la borne, on suppose que $\Sigma = \{c_1; \ldots; c_n; f_1^{i_1}; \ldots; f_m^{i_m}\}$ avec $c_1, \ldots, c_n$ les symboles de constantes (si Σ ne possède pas de constante, $\mathcal{T}(\Sigma, \emptyset) = \emptyset$, ce qui n'est pas intéressant) et $i_1, \ldots, i_m$ les arités des symboles purement fonctionnels $f_1, \ldots, f_m$.

On pose alors $E = \left(\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \{c_i \approx c_j\} \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \{f_j(c_1^{(i_j)}) \approx c_1\} \right)$ où $c_1^{(k)} = (\underbrace{c_1, \ldots, c_1}_{k \text{ fois}})$. Ces équations imposent alors que les mondes les vérifiant soit exactement ceux décrits ci-dessus. □

Il est intéressant de remarquer que cette borne inférieure ne dépend que du nombre de symboles fonctionnels, et non de leurs arités comme on aurait pu s'y attendre.

3.3.2 Conjectures

Je vais tout d'abord me restreindre à un cas vraiment très simple pour lequel on a bien une loi 0-1, et qui permet de comprendre pourquoi je pense qu'il doit en être de même dans des cas plus généraux:

Proposition 11 (Loi 0-1 restreinte). *On considère uniquement des égalités $s \approx t$ entre termes clos, pour lesquelles les termes s et t ne partagent aucun symbole fonctionnel.*

Soit E un ensemble non vide de telles égalités. Alors $\mathrm{Pr}_\infty(E) = 0$.

Démonstration. On peut supposer que Σ possède des constantes, sinon $\mathcal{T}(\Sigma, \emptyset) = \emptyset$.

On peut se restreindre au cas où on a qu'une seule équation, puisque si $E \subseteq E'$, alors $\mathrm{Pr}_N(E') \leqslant \mathrm{Pr}_N(E)$.

On suppose donc $E = \{s \approx t\}$. On interprète indépendemment de toutes les façons possibles les symboles de s et de t. Il est facile de voir qu'en faisant une permutation de l'interprétation des symboles fonctionnels sur le domaine, on obtient une permutation de l'interprétation de s et de t, ce qui veut dire que tout élément du domaine à la même probabilité d'être une interprétation possible de s ou de t. Une fois que l'interprétation de s est fixée, il y a donc 1 possibilité sur N pour que t ait la même interprétation.

Par conséquent on a $\mathrm{Pr}_N(s \approx t) = \dfrac{1}{N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$. □

On a une autre restriction un peu plus étendue, qui couvre des cas plus intéressants dans la pratique, et qui montre comment on peut passer d'une loi sur les termes clos à une loi sur tous les termes.

Définition 11 (Profondeur d'un terme).
Soit $s \in \mathcal{T}(\Sigma, V)$. La profondeur de s est définie comme la hauteur de l'arbre associé à s

Proposition 12 (Loi 0-1 sur les termes de profondeur 1). *On s'intéresse ici uniquement aux termes de profondeur 1. Soit E un ensemble fini d'équations entre termes de profondeur 1. Si il existe $s \approx t \in E$ tel que $s \neq t$ en tant que termes, alors $\mathrm{Pr}_\infty(E) = 0$, sinon $\mathrm{Pr}_\infty(E) = 1$.*

Démonstration. Si toute les équations sont de la forme $s \approx s$, il est clair que $\forall N \ \mathrm{Pr}_N(E) = 1$.

Dans le cas contraire, on peut supposer comme dans la preuve précédente qu'on a affaire à une seule équation $s \approx t$ entre termes distincts.

Supposons tout d'abord que s et t sont des termes clos. Il y a alors deux cas:

- Les racines de s et t sont distinctes. Par exemple on suppose que $s = f(a_1, \ldots, a_n)$ et $t = g(b_1, \ldots, b_m)$, où les a_i et b_j sont des constantes, pas forcément distinctes. On peut interpréter les constantes de toutes les manières possibles. On peut interpréter f de toutes les façons possibles. Une fois ceci fait, on peut interpréter g de toutes les façons possibles, sauf en un point qui correspond à l'interprétation de $(b_1, \ldots, b_m)$, pour lequel on a plus qu'un seul choix valide sur N possibles. On a donc $\mathrm{Pr}_N(s \approx t) = \frac{1}{N} \to 0$.
- Les racines de s et t sont égales. On a alors par exemple $s = f(a_1, \ldots, a_n)$ et $t = f(b_1, \ldots, b_n)$. Comme les deux termes ne sont pas égaux, $\exists i \ a_i \neq b_i$. On majore ensuite le nombre de mondes satisfiant $s \approx t$. Pour cela, on ne s'intéresse pas aux choix des autres constantes, et on considère toutes les interprétations possibles pour celles-ci. Pour les interprétations de a_i et b_i, on a deux choix possibles : soit on choisit la même, et dans ce cas on a pas de contrainte supplémentaire sur l'interprétation de f ; soit on choisit des différents et dans ce cas il faut que f soit interprétée de la même façon en deux points différents qui sont ceux comportant les interprétations de a_i et b_i en i-ème position. On a donc $\mathrm{Pr}_N(s \approx t) \leqslant \dfrac{NN^{N^n} + (N^2 - N)N^{N^n - 1}}{N^2 N^{N^n}} = \dfrac{2N-1}{N^2} \to 0$.

On suppose maintenant que s et t ne sont plus clos, et que le terme s a la variable x comme sous-terme, c'est pourquoi on le notera $s(x)$. Grâce à la remarque faite dans la section 2.2.2, on sait que $\mathrm{Pr}_N(E)$ ne dépend pas de la signature choisi. On se place donc dans la signature $\Sigma' = \Sigma \cup \{X\}$ où X est une constante fraîche. Sur cette signature, il est clair que $\mathrm{Pr}_N(s(x) \approx t) \leqslant \mathrm{Pr}_N(s(X) \approx t)$, puisque pour tout monde vérifiant $s(x) \approx t$ on a aussi $s(X) \approx t$ de vérifié. Comme le nombre de variables apparaissant dans s et t est fini, on peut donc se ramener au cas des termes clos, quitte à se placer sur des signatures plus grandes. □

On pourrait alors penser qu'on peut alors traiter des cas plus généraux, comme celui des théories Shallow. Il s'agit d'ensemble d'équations pour lesquelles les variables sont toutes de profondeur 1, les constantes pouvant être de n'importe quelle profondeur. Or, on peut facilement se ramener d'une théorie Shallow à un ensemble d'équations du type utilisé dans la proposition précédente, ceci en rajoutant des constantes fraîches. Par exemple, on remplace l'équation $E = \{f(g(a)) \approx g(f(a))\}$ par les équations $E' = \{f(b) = g(c); b = g(a); c = f(a)\}$. Malgré tout, cette transformation ne préserve pas le nombre de mondes possibles : en effet $\#worlds_N(E) = N^2 \#worlds_N(E')$, puisqu'on peut choisir librement b et c dans le premier cas. Par conséquent, la preuve précédente ne peut pas être utilisée. Toutefois on peut faire certaines conjectures, notamment concernant les termes clos:

Conjecture 2 (Loi 0-1 sur les termes clos).
Soit $s, t \in \mathcal{T}(\Sigma, \emptyset)$. Si $s = t$ en tant que termes, alors $\mathrm{Pr}_\infty(s \approx t) = 1$, sinon $\mathrm{Pr}_\infty(s \approx t) = 0$

Il faut remarquer que si une seules des équations $s \approx t$ de l'ensemble E est de la forme correspondant aux propositions précédentes, avec $s \neq t$, on peut appliquer ces propositions et en déduire que $\mathrm{Pr}_\infty(E) = 0$.

Remarque: Si on avait choisi d'utiliser les structures et non les mondes (i.e. de compter à isomorphisme près), ce résultat serait faux, comme le montre le contre-exemple 2.4.

Conjecture 3 (Loi 0-1 pour la logique équationnelle).
Soit E un ensemble fini d'équations. Si Pr_∞ existe alors s'il existe $s \approx t \in E$ tel que $s \neq t$, alors $\mathrm{Pr}_\infty = 0$, sinon $\mathrm{Pr}_\infty = 1$.

En supposant qu'on en ait la preuve, on peut utiliser la conjecture précédente pour prouver ce résultat, et ceci en profitant de la remarque de la preuve de la proposition 12 qui montre comment passer d'une équation sur des termes généraux à une équation sur des termes clos.

Conclusion

On peut donc sans trop de difficulté appliquer les probabilités à la Halpern à la logique équationnelle, même si cela soulève des problèmes pour lesquelles il est difficile de savoir quelle est la meilleure solution, comme par exemple pour savoir comment interpréter le symbole $\approx$, ou si on doit compter les mondes à isomorphisme près ou non. Il serait également intéressant de voir si l'on peut trouver une méthode comme celle de l'entropie maximum dans un cadre plus général que celui des prédicats unaires, même si Halpern pense qu'il y aurait peu de cas intéressants où l'on pourrait le faire.

Comme on vient de le voir, de nombreuses questions reste en suspens, que ce soit l'indécidabilité du calcul du degré de croyance, ou la présence ou non d'une loi 0-1 dans le cas où on n'a pas de conditions. Toutefois il semblerait que la logique équationnelle ne soit pas suffisamment restreignante pour que ces résultats diffèrent du cas général. Il faut donc parfois se restreindre à des logiques incluses dans la logique équationnelle, en ne regardant que les termes clos, ou en limitant la profondeur des termes, pour obtenir des preuves.

On peut maintenant essayer de comprendre ce que signifient les degrés de croyance ainsi définis. On pourrait ainsi voir le degré de croyance comme une concrétisation du degré de vérité de la logique flou (cf. [Bou02]).

Enfin, une dernière question reste ouverte, celle de savoir si l'on peut faire un lien avec la réécriture en présence de probabilités (cf. [BK02, BH03]), ce qui n'est à priori pas le cas (c'est en tout cas loin d'être évident).

A Annexe: Indécidabilité de la trivialité de $\approx_E$

Je rappelle tout d'abord les caractéristiques des ensembles d'équations triviaux

Proposition 13 (Trivialité [BN98, Lemme 3.5.5]**).** *Soit E un ensemble d'égalités. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\approx_E = \mathcal{T}(\Sigma, V) \times \mathcal{T}(\Sigma, V)$
- *on peut prouver $x \approx y$ pour $x, y \in V$ à partir de E ($E \vdash x \approx y$)*
- *les modèles de E sont tous de cardinal 1*

On dit alors que $\approx_E$ est trivial.

Je donne ensuite la preuve du théorème de la section 2.3.2 dont je rappelle ici l'énoncé:

Théorème 7 (Indécidabilité de la trivialité).
Le problème de décider, à partir de la donnée d'une signature Σ et d'un ensemble d'égalités E sur les termes de $\mathcal{T}(\Sigma, V)$, si $\approx_E$ est trivial, est récursivement énumérable complet.

Démonstration. Premièrement, ce problème est bien récursivement énumérable : si on a une signature Σ et un ensemble d'égalités E, on essaie de construire une preuve de $x \approx y$ pour $x, y \in V$ à partir de E.

On montre ensuite la complétude par réduction du problème suivant: étant donnés un automate cellulaire de dimension 1 et de plus proche voisinage, une configuration finie de cet automate, et un état, on cherche à savoir si cet état apparaît dans la première colonne de l'automate lors de son fonctionnement avec pour entrée la configuration finie. Ce problème est clairement récursivement énumérable complet par réduction du problème de l'arrêt sur les machines de Turing.

Soit $(S = \{s_0; \ldots; s_n\}, \delta)$ est automate cellulaire de dimension 1 et de plus proche voisinage, et une configuration finie $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$, s_0 étant l'état quiescent.

On considère la signature $\Sigma = \{\top; S_0; \ldots; S_n; \#_g; \#_d; 0; H_g; H_d; V; s; Col; Eq; C; t\}$ et l'ensemble d'égalités suivant:

·Pour préparer les inéquations (cf. 2.3.2):
$Eq(x, x) \approx \top$, $C(\top, x) \approx x$

·H_g désigne le voisin de gauche sur le ruban, H_d celui de droite, V désigne le successeur temporel:
$H_d(H_g(x)) \approx x$, $H_g(H_d(x)) \approx x$, $V(H_g(x)) = H_g(V(x))$, $V(H_d(x)) = H_d(V(x))$

·On initialise le ruban avec la configuration finie initiale:

$s(H_g(0)) \approx \#_g$, $s(0) \approx S_{i_1}$, $s(H_d(0)) \approx S_{i_2}$, $\ldots$, $s(H_d(\cdots(H_d(0)))) \approx S_{i_m}$, $s(H_d(H_d(\cdots(H_d(0))))) \approx \#_d$

·Les symboles $\#_g$ et $\#_d$ permettent de borner la configuration:
$C(Eq(s(x), \#_g), s(H_g(x))) \approx C(Eq(s(x), \#_g), \#_g)$ et $C(Eq(s(x), \#_d), s(H_d(x))) \approx C(Eq(s(x), \#_d), \#_d)$

·On reproduit toutes les transitions de l'automate (qui sont en nombre fini):
$\forall s_{j_1}, s_{j_2}, s_{j_3}, s_{j_4} \in S$, si $\delta(s_{j_1}, s_{j_2}, s_{j_3}) = s_{j_4}$ on a $t(S_{j_1}, S_{j_2}, S_{j_3}) \approx S_{j_4}$. De plus, si j_1 ou j_2 est égal à 0, on écrit la même transition avec $\#_g$ à la place de S_0, de même avec $\#_d$ si j_2 ou j_3 vaut 0. De plus on ajoute les transitions $t(\#_g, \#_g, \#_g) \approx \#_g$ et $t(\#_d, \#_d, \#_d) \approx \#_d$

·L'état du successeur temporel est obtenu par le transition sur les états des voisins:
$s(V(x)) \approx t(s(H_g(x)), s(x), s(H_d(x)))$

·$Col(x)$ désigne un état qui n'apparaît pas dans la colonne temporelle de x:
$Col(V(x)) \approx Col(x)$, $C(Eq(Col(x), s(x)), y) \approx \top$

·On veut que S_n n'apparaisse pas dans la première colonne:
$Col(0) \approx S_n$

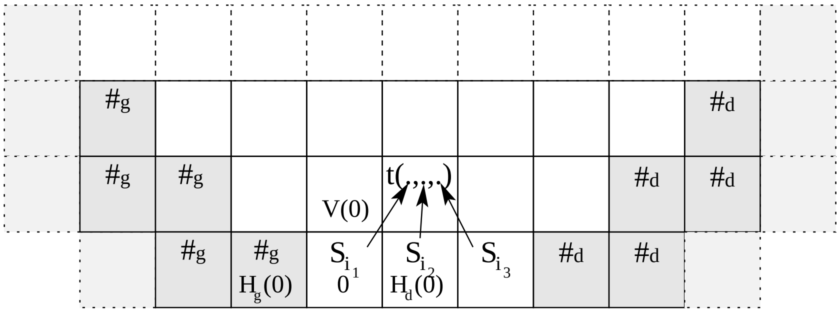

FIG. 1 – Représentation du diagramme espace-temps de l'automate

Si l'état s_n apparaît dans la colonne de 0 dans le fonctionnement de l'automate cellulaire, alors E n'a pas d'autres modèles que le modèle trivial, car si un tel modèle existait, on aurait forcément $s(V(V(\cdots(0)))) \approx S_n$, or $Col(V(V(\cdots(0)))) \approx Col(0) \approx S_n$, donc $Col(V(V(\cdots(0)))) \approx s(V(V(\cdots(0))))$, donc $y \approx \top$. Réciproquement, si s_n n'apparaît pas dans la colonne de 0, il est facile de construire un modèle non trivial: celui qui représente le diagramme espace-temps de l'automate, avec $Col(0)$ valant S_N. On a bien réduit le problème de l'apparition d'un état dans un automate cellulaire en notre problème de décision de la trivialité d'un ensemble d'égalités. $\square$

Références

[AH94] Martin Abadi and Joseph Y. Halpern. Decidability and expressiveness for first-order logics of probability. *Information and Computation*, 112(1):1–36, 1994.

[BH03] Olivier Bournez and Mathieu Hoyrup. Rewriting logic and probabilities. In Robert Nieuwenhuis, editor, *Rewriting Techniques and Applications, 14th International Conference, RTA 2003, Valencia, Spain, June 9-11, 2003, Proceedings*, volume 2706 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 61–75. Springer, 2003.

[BK02] Olivier Bournez and Claude Kirchner. Probabilistic rewrite strategies: Applications to ELAN. In Sophie Tison, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 2378 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 252–266. Springer-Verlag, July 22-24 2002.

[BN98] Franz Baader and Tobias Nipkow. *Term Rewriting and all that.* Cambridge University Press, 1998.

[Bou02] Olivier Bournez. A generalization of equational proof theory? In Holger Hermanns and Roberto Segala, editors, *Process Algebra and Probabilistic Methods : Performance Modeling and Verification*, volume 2399 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 208–209. Springer-Verlag, July 25–26 2002.

[Fag76] R. Fagin. Probabilities on finite models. *Journal of Symbolic Logic*, 41(1):50–58, 1976.

[GHK92] Adam J. Grove, Joseph Y. Halpern, and Daphne Koller. Random worlds and maximum entropy. In *Logic in Computer Science*, pages 22–33, 1992.

[GHK96a] Adam J. Grove, Joseph Y. Halpern, and Daphne Koller. Asymptotic conditional probabilities: The unary case. *SIAM Journal on Computing*, 25(1):1–51, 1996.

[GHK96b] Adam J. Grove, Joseph Y. Halpern, and Daphne Koller. Asymptotic conditional probabilities: The non-unary case. *The Journal of Symbolic Logic*, 61(1):250–276, 1996.

[Hal89] Joseph Y. Halpern. An analysis of first-order logics of probability. In *Proceedings of IJCAI-89, 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1375–1381, Detroit, US, 1989.