

Projet « optimisation »

(par groupe de 2 élèves, encadrement : Alain Billionnet)

Titre : Un modèle cellulaire de gestion des parasites

(novembre 2008)

1. But du projet

- Entraînement à la modélisation d'un problème concret. Définition rigoureuse du problème et en particulier des contraintes et de l'objectif. Choix d'une bonne modélisation compte tenu des techniques que l'on compte utiliser ;
- Manipulation concrète d'un algorithme « Branch & Bound ». Bien appréhender le compromis qualité de l'évaluation / longueur de l'énumération. Relation avec le point précédent ;
- Utilisation d'un logiciel professionnel de programmation mathématique : CPLEX ;
- Etude et mise en œuvre d'une métaheuristique simple et souvent efficace : le recuit simulé ;
- Etude des problèmes posés par la mise en œuvre informatique des algorithmes, problèmes d'efficacité ;
- Apprendre à analyser les résultats obtenus.

2. Présentation du problème

L'étude concerne un parasite présent dans une forêt et dont la population, en augmentation régulière, se disperse par voisinage. La zone de forêt étudiée est divisée en cellule de forme carrée comme sur la figure 1. Le tableau ainsi obtenu comporte M lignes et N colonnes. On se fixe un certain horizon de gestion divisé en T périodes. Le but est de déterminer quelles cellules doivent être traitées et à quel moment de façon à éviter le plus possible la prolifération du parasite. Le traitement concerne la forêt (coupe) et non le parasite lui-même. On fait ainsi l'hypothèse qu'une cellule ne peut être traitée qu'une fois. De plus le nombre de cellules pouvant être traitées à chaque période est limité.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									

Figure 1. La zone étudiée est découpée en 36 cellules carrées

2.1 Schéma de propagation du parasite

Le schéma de propagation du parasite est le suivant : soit $s_{i,j,t}$ la population de la cellule (i, j) à la période t . A la période $(t+1)$ cette population a augmenté et est devenue égale à $s_{i,j,t}(1+r)$ où r est une constante donnée. Cette nouvelle population ne s'est pas maintenue entièrement dans la cellule (i, j) . Une partie s'est diffusée dans les cellules voisines. Ainsi, de façon générale, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$ et pour tout $t \in \{2, \dots, T\}$: $s_{i,j,t} = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N p_{k,l,i,j} [(1+r)s_{k,l,t-1}]$. Dans cette expression $s_{k,l,1}$ désigne la population initiale du parasite dans la cellule (k, l) et $p_{k,l,i,j}$ la proportion de la population de la cellule (k, l) qui se diffuse dans la cellule (i, j) .

Les données :

T : nombre de périodes dans l'horizon de gestion considéré ;

M : nombre de lignes dans le tableau représentant la zone considérée ;

N : nombre de colonnes dans le tableau représentant la zone considérée ;

$s_{i,j,1}$ ($i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$) : population initiale du parasite dans la cellule (i, j) ;

r : taux de croissance du parasite ;

$p_{k,l,i,j}$ ($k = 1, \dots, M; l = 1, \dots, N; i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$) : proportion de diffusion de la cellule (k, l) à la cellule (i, j) ;

K : nombre maximal de cellules pouvant être traitées à chaque période.

Variables de décision :

$x_{i,j,t}$: On associe à chaque cellule et à chaque période une variable binaire qui vaut 1 si et seulement si la cellule (i, j) reçoit à la période t un certain traitement qui élimine - définitivement - le parasite de cette cellule. Comme nous l'avons dit plus haut, on s'intéresse ici à un traitement de la forêt et non à un traitement du parasite lui-même. Ce traitement peut consister, par exemple, à procéder à une coupe complète de la cellule. On suppose qu'après une telle coupe le parasite ne peut plus se développer dans cette cellule.

Les contraintes

Une cellule n'est traitée qu'une seule fois au maximum au cours de la période de gestion. Lorsqu'une cellule a été traitée, tout se passe comme si la population du parasite était nulle dans cette cellule pour toutes les périodes suivant la période de traitement y compris la période de traitement elle-même. Comme nous l'avons dit plus haut, le parasite ne peut plus se développer dans cette cellule et la population qui diffuse dans cette cellule à partir d'autres cellules est perdue. On suppose bien sûr que, pour différentes raisons, le nombre de cellules pouvant être traitées à chaque période de l'horizon de gestion est limité.

L'objectif

On souhaite déterminer les cellules à traiter de façon à minimiser la population totale du parasite sur l'horizon de gestion : $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T s_{i,j,t}$.

3. Travail demandé

- 3.1. Proposer une formulation par un programme mathématique du modèle cellulaire de gestion des parasites présenté ci-dessus.
- 3.2. Résoudre le problème par deux approches différentes:
 - (i) Formulation par un programme *linéaire en variables mixtes* suivie d'une résolution par le solveur CPLEX ; on pourra utiliser le modeleur AMPL ;
 - (ii) Résolution par une *métaheuristique* : la méthode du recuit simulé.
- 3.3. Effectuer des tests sur une dizaine d'instances du problème. Analyser les résultats. Présenter ces résultats de la façon la plus claire possible (par exemple par une visualisation de l'évolution de la population du parasite au cours du temps). Donner un maximum d'indicateurs pour les deux approches. Pour la première, on s'intéressera, par exemple, au temps de calcul, au nombre de nœuds développés dans l'arbre de recherche, à la valeur de la borne à la racine de cet arbre, etc. Donner les limites de ces 2 approches.
- 3.4. Reprendre l'approche par la programmation linéaire en variables mixtes et essayer de l'améliorer : modélisation plus efficace, prétraitement, ajout de coupes...Effectuer les expérimentations nécessaires.

4. Exemple 1

Considérons la zone de la figure 2 découpée en 25 cellules. On suppose qu'un parasite commence juste à se développer dans cette zone et l'objectif est de maîtriser ce développement le mieux possible. On suppose que 2 unités de ce parasite sont apparues dans la cellule (5,1) et que la topographie et les vents ont tendance à le propager dans les 3 directions Nord, Nord-Est et Est. L'horizon de gestion est de 4 ans divisé en 4 périodes d'un an.

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5	••				

Figure 2. La zone étudiée est découpée en 25 cellules carrées et 2 unités du parasite sont apparues dans la cellule (5,1)

Les données :

$$r = 9 ;$$

$$p_{i,j,i,j} = 0.3 ;$$

$p_{i,j,k,l} = 0.15$ si la cellule (k,l) est une des trois cellules les plus proches de la cellule (i,j) et situées au nord, au nord-est ou à l'est de la cellule (i,j) ;

$p_{i,j,k,l} = 0.05$ si la cellule (k,l) est une des 5 autres cellules, les plus proches de la cellule (i,j) , toujours situées au nord, au nord-est ou à l'est de la cellule (i,j) ;

$p_{i,j,k,l} = 0$ pour toutes les autres cellules (k,l) (Figure 3) ;

$$K = 6 .$$

$p_{4,2,1,1} = 0$	$p_{4,2,1,2} = 0$	$p_{4,2,1,3} = 0$	$p_{4,2,1,4} = 0$	$p_{4,2,1,5} = 0$
$p_{4,2,2,1} = 0$	$p_{4,2,2,2} = 0.05$	$p_{4,2,2,3} = 0.05$	$p_{4,2,2,4} = 0.05$	$p_{4,2,2,5} = 0$
$p_{4,2,3,1} = 0$	$p_{4,2,3,2} = 0.15$	$p_{4,2,3,3} = 0.15$	$p_{4,2,3,4} = 0.05$	$p_{4,2,3,5} = 0$
$p_{4,2,4,1} = 0$	$p_{4,2,4,2} = 0.3$	$p_{4,2,4,3} = 0.15$	$p_{4,2,4,4} = 0.05$	$p_{4,2,4,5} = 0$
$p_{4,2,5,1} = 0$	$p_{4,2,5,2} = 0$	$p_{4,2,5,3} = 0$	$p_{4,2,5,4} = 0$	$p_{4,2,5,5} = 0$

Figure 3. Valeurs des paramètres de dispersion $p_{4,2,k,l}$ associés à l'exemple 1

Supposons tout d'abord que l'on ne traite aucune cellule. L'évolution de la population du parasite est donnée par la figure 4.

	1	2	3	4	5
1	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0.5 \rightarrow 11.25$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 31.50$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1.5 \rightarrow 50.25$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 46.5$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0.5 \rightarrow 27.75$
2	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 33.75$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 87.75$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 121.5$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 4 \rightarrow 96.75$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 46.5$
3	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 10.5 \rightarrow 67.5$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 18 \rightarrow 155.25$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 17.5 \rightarrow 184.5$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 121.5$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1.5 \rightarrow 50.25$
4	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 18 \rightarrow 81$	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 27 \rightarrow 162$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 18 \rightarrow 155.25$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 87.75$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 31.50$
5	$2 \rightarrow 6 \rightarrow 18 \rightarrow 54$	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 18 \rightarrow 81$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 10.5 \rightarrow 67.5$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 33.75$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0.5 \rightarrow 11.25$

Figure 4.a. Evolution du parasite au cours des différentes périodes si l'on n'effectue aucun traitement

Effectif initial	2
Effectif à la période 2	20
Effectif à la période 3	200
Effectif à la période 4	1897.5

Figure 4.b. Effectif de la population totale du parasite à chaque période si l'on n'effectue aucun traitement

Voyons maintenant ce qui se passe lorsque l'on traite certaines cellules. Dans cet exemple on autorise le traitement de 6 cellules au maximum à chaque période. La solution optimale est donnée par le tableau de la figure 5 ci-dessous. Ce tableau indique, pour chaque cellule, si elle est traitée et si oui à quelle période.

	1	2	3	4	5
1	4	4	4	4	4
2	3	3	3	-	-
3	3	2	2	-	-
4	3	2	2	-	-
5	3	2	2	-	-

Figure 5. Cellules traitées et période de traitement

Dans cette solution optimale, l'évolution de la population du parasite, période par période, est donnée par la figure 6. Dans la figure 6.a les cases rouges indiquent les cellules traitées à chaque période et les valeurs indiquées dans chaque case correspondent à l'effectif de la population du parasite. Le signe « - » indique une population nulle. Dans le tableau 6.b est indiquée la population totale du parasite à chaque période.

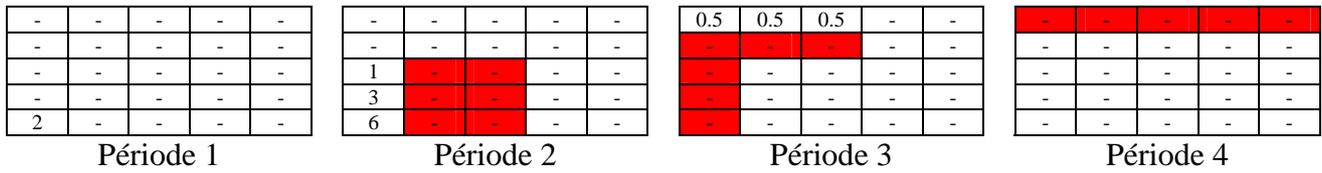


Figure 6a. Cellules choisies pour être traitées à chaque période et effectif de la population du parasite à chacune des périodes.

Effectif initial	2
Effectif à la période 2	10
Effectif à la période 3	1.5
Effectif à la période 4	0

Figure 6.b. Effectif de la population totale du parasite à chaque période

5. Exemple 2

Modifions légèrement l'exemple précédent en considérant une zone représentée par un tableau comportant 5 lignes et 7 colonnes et un horizon de gestion comportant 5 périodes. De plus, à l'instant initial la cellule (1,1) comporte une population de 4 unités, la cellule (3,3), une population de 6 unités et la cellule (5,1), une population de 10 unités. Supposons tout d'abord que l'on ne traite aucune cellule. L'évolution de la population du parasite est donnée par la figure 7.

	1	2	3	4
1	4 → 12 → 38.5 → 164.25 → 914.625	0 → 6 → 41 → 319.5 → 2673	0 → 5 → 60 → 588.75 → 5445	0 → 3 → 65 → 765.75 → 7645.5
2	0 → 0 → 15 → 168.75 → 1215	0 → 0 → 30 → 438.75 → 3847.5	0 → 9 → 89 → 850.5 → 7249.5	0 → 9 → 101 → 969.75 → 8707.5
3	0 → 5 → 52.5 → 337.5 → 1755	6 → 5 → 90 → 776.25 → 4995	0 → 23 → 141.5 → 1084.5 → 7674.75	0 → 9 → 89 → 850.5 → 7249.5
4	0 → 15 → 90 → 405 → 1620	0 → 15 → 135 → 810 → 4050	0 → 5 → 90 → 776.25 → 4995	0 → 0 → 30 → 438.75 → 3847.5
5	10 → 30 → 90 → 270 → 810	0 → 15 → 90 → 405 → 1620	0 → 5 → 52.5 → 337.5 → 1755	0 → 0 → 15 → 168.75 → 1215
	5	6	7	
1	0 → 3 → 56 → 714.75 → 7708.88	0 → 0 → 21 → 414 → 5452.5	0 → 0 → 4.5 → 158.75 → 2777.25	
2	0 → 3 → 59 → 698.25 → 7159.5	0 → 0 → 18 → 327 → 4176	0 → 0 → 3 → 103.25 → 1777.5	
3	0 → 3 → 39 → 453.75 → 4743	0 → 0 → 9 → 161.25 → 2214	0 → 0 → 1.5 → 41.25 → 761.875	
4	0 → 0 → 5 → 157.5 → 2025	0 → 0 → 0 → 33.75 → 742.5	0 → 0 → 0 → 3.75 → 187.5	
5	0 → 0 → 2.5 → 56.25 → 590.625	0 → 0 → 0 → 11.25 → 202.5	0 → 0 → 0 → 1.25 → 48.75	

Figure 7.a. Evolution du parasite au cours des différentes périodes si l'on n'effectue aucun traitement

Effectif initial	20
Effectif à la période 2	180
Effectif à la période 3	1623.5
Effectif à la période 4	14262
Effectif à la période 5	119852

Figure 7.b. Effectif de la population totale du parasite à chaque période si l'on n'effectue aucun traitement

Voyons maintenant ce qui se passe lorsque l'on traite certaines cellules. Dans cet exemple on autorise le traitement de 7 cellules au maximum à chaque période. La solution optimale est

donnée par le tableau de la figure 8 ci-dessous. Ce tableau indique, pour chaque cellule, si elle est traitée et si oui à quelle période.

	1	2	3	4	5	6	7
1	4	4	3	3	4	4	4
2	5	5	4	3	3	4	5
3	3	3	2	2	5	5	5
4	2	2	2	-	-	-	-
5	3	2	2	-	-	5	-

Figure 8. Cellules traitées et période de traitement

Dans cette solution optimale, l'évolution de la population du parasite, période par période, est donnée par la figure 9. Dans la figure 9.a les cases rouges indiquent les cellules traitées à chaque période et les valeurs indiquées dans chaque case correspondent à l'effectif de la population du parasite. Le signe « - » indique une population nulle. Dans le tableau 9.b est indiquée la population totale du parasite à chaque période.

4	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	6	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-

Période 1

12	6	5	3	3	-	-
-	-	9	9	3	-	-
5	5	-	-	3	-	-
-	-	-	-	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-

Période 2

38.5	41	-	-	40	16.5	4.5
7.5	15	37	-	-	13.5	3
-	-	-	-	9	4.5	1.5
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

Période 3

-	-	-	-	-	-	-
22.5	56.25	-	-	-	-	42.75
-	-	-	-	27	27	15.75
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

Période 4

-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

Période 5

Figure 9a. Cellules choisies pour être traitées à chaque période et effectif de la population du parasite à chacune des périodes.

Effectif initial	20
Effectif à la période 2	93
Effectif à la période 3	231.5
Effectif à la période 4	191.25
Effectif à la période 5	0

Figure 9.b. Effectif de la population totale du parasite à chaque période

Remarque. A la période 5, le traitement de la cellule (5,6) est inutile. Le traitement de cette cellule apparaît dans la solution optimale car on ne vise qu'à minimiser la somme des populations du parasite à chaque période en traitant au maximum 7 cellules.