Algèbre – Calcul matriciel

Christophe Mouilleron

école nationale supérieure d'informatique pour l'industrie et l'entreprise

Notations

$\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels

$\mathbb{C}$ = ensemble des nombres complexes

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{m\times n} = \text{ens. des matrices avec } \begin{cases} m \text{ lignes} \\ n \text{ colonnes} \\ \text{des coefficients dans } \mathbb{K} \end{cases}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ = une matrice $m \times n$ à coefficients complexes

$a_{i,j} \in \mathbb{C}$ = coefficient de A situé ligne i et colonne j

Addition de deux matrices

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ $C = A + B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ avec $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$

addition point à point

Transposition

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ $C = A^t \in \mathbb{C}^{n \times m}$ avec $c_{i,j} = a_{j,i}$

lignes $\leftrightarrow$ colonnes

Multiplication par un scalaire

$\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ $C = \lambda A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ avec $c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$

Opérations de base (2)

Multiplication de deux matrices

$$A \in \mathbb{C}^{m\times n},\ B \in \mathbb{C}^{n\times p} \quad \rightsquigarrow \quad C = A\,B \in \mathbb{C}^{m\times p} \text{ avec } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \boxed{\begin{matrix} b_{1,3} \\ b_{2,3} \end{matrix}} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \end{pmatrix} \quad B$$

$$A \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ \boxed{a_{2,1} \quad a_{2,2}} & \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \square \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix} \quad C$$

$$\square \qquad c_{2,3} = a_{2,1}\, b_{1,3} + a_{2,2}\, b_{2,3}$$

Matrices et systèmes linéaires

$$\begin{cases} 3x - 5y & = 4 \\ -x + 2y & = -1 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b}$$

Questions :

- Combien a-t-on des solutions ? déterminant
- Quelles sont les solutions ? matrice inverse

Déterminant – Cas particuliers

- $n = 1 \rightsquigarrow \det(a) = a$ $\quad x = \frac{b}{a}$ si $a \neq 0$
- $n = 2 \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$ $\quad$ produit en croix

Déterminant – Cas particuliers

- $n = 1 \rightsquigarrow \det(a) = a$ $\qquad x = \frac{b}{a}$ si $a \neq 0$
- $n = 2 \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$ $\qquad$ produit en croix
- matrice diagonale $\rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} d_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{n,n} \end{pmatrix} = d_{1,1} \times \cdots \times d_{n,n}$

Déterminant – Cas particuliers

- $n = 1 \rightsquigarrow \det(a) = a$ $\qquad x = \frac{b}{a}$ si $a \neq 0$
- $n = 2 \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$ $\qquad$ produit en croix
- matrice diagonale $\rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} d_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{n,n} \end{pmatrix} = d_{1,1} \times \cdots \times d_{n,n}$
- matrice triangulaire $\rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} t_{1,1} & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ & & t_{n,n} \end{pmatrix} = t_{1,1} \times \cdots \times t_{n,n}$

Déterminant – Cas particuliers

- $n = 1 \rightsquigarrow \det(a) = a$ $\quad x = \frac{b}{a}$ si $a \neq 0$
- $n = 2 \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$ $\quad$ produit en croix
- matrice diagonale $\rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} d_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{n,n} \end{pmatrix} = d_{1,1} \times \cdots \times d_{n,n}$
- matrice triangulaire $\rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} t_{1,1} & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ & & t_{n,n} \end{pmatrix} = t_{1,1} \times \cdots \times t_{n,n}$
- échange de 2 lignes $\rightsquigarrow \det(A') = -\det(A)$ $\quad$ idem pour 2 colonnes
- multiplier 1 ligne par $\lambda \rightsquigarrow \det(A') = \lambda \det(A)$ $\quad$ idem pour 1 colonne

Déterminant – Propriétés

Formule générale : $$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),\, i}$$

Propriété

On considère un système linéaire $Ax = b$.

Si $\det(A) \neq 0$, alors ce système a une unique solution.

Si $\det(A) = 0$, alors ce système a soit 0, soit une infinité de solutions (selon la valeur de b).

On a aussi :

- $\det(A\,B) = \det(A)\,\det(B)$
- $\det(A^t) = \det(A)$

Déterminant – Calcul par développement

Méthode :

- choisir une ligne i ou une colonne j
- utiliser $$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

  où $A_{i,j} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ = A privée de sa ligne i et de sa colonne j

Déterminant – Calcul par développement

Méthode :

- choisir une ligne i ou une colonne j
- utiliser $$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

  où $A_{i,j} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ = A privée de sa ligne i et de sa colonne j

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +\,2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -3$$

Déterminant – Calcul par pivot de Gauss

Méthode :

1. transformer A en matrice triangulaire supérieure T via :

$$\begin{aligned} \text{élimination} \quad & L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ et } j < i \\ \text{échange} \quad & L_i \leftrightarrow L_j \text{ avec } i < j \end{aligned}$$

2. utiliser $\det(A) = (-1)^{\text{nb. échanges}} \det(T)$

Exemple sur $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ au tableau $\rightsquigarrow \det(A) = -3$

Rq : La matrice T n'est pas unique !

Matrice inverse – Propriétés

Théorème

Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est telle que $\det A \neq 0$, alors il existe une unique matrice, notée A^{-1}, vérifiant
$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n.$$

Propriétés :

- $Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1} b$ quand A^{-1} existe

Matrice inverse – Propriétés

Théorème

Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est telle que $\det A \neq 0$, alors il existe une unique matrice, notée A^{-1}, vérifiant

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n.$$

Propriétés :

- $Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1} b$ quand A^{-1} existe
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ $\qquad B^{-1} A^{-1} (AB) = B^{-1} B = I_n$
- $I_n^{-1} = I_n$

Matrice inverse – Propriétés

Théorème

Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est telle que $\det A \neq 0$, alors il existe une unique matrice, notée A^{-1}, vérifiant

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Propriétés :

- $Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b$ — quand A^{-1} existe
- $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$ — $B^{-1}\,A^{-1}\,(AB) = B^{-1}\,B = I_n$
- $I_n^{-1} = I_n$
- si $D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{n,n} \end{pmatrix}$, alors $D^{-1} = \begin{pmatrix} d_{1,1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$

Matrice inverse – Calcul via comatrice

Formule : $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{Com}(A)^t$$

où $\mathrm{Com}(A) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ avec coef. en (i,j) valant $(-1)^{i+j}\det A_{i,j}$

Matrice inverse – Calcul via comatrice

Formule : $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{Com}(A)^t$$

où $\mathrm{Com}(A) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ avec coef. en (i,j) valant $(-1)^{i+j}\det A_{i,j}$

Exemple : $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = -3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice inverse – Calcul par pivot de Gauss

Méthode :

1. partir du couple (A, I_n)
2. transformer A (à gauche) en matrice triangulaire supérieure T via :

   élimination $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $j < i$

   échange $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i < j$
3. se ramener à une diagonale de 1 à gauche via :

   division $L_i \leftarrow L_i / \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$
4. transformer à gauche en matrice identité via :

   élimination' $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $i < j$
5. renvoyer la matrice de droite

Réduction d'endomorphisme

Objectif :
Trouver P inversible et D diagonale telles que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Motivation = pouvoir faire certains calculs dont :

- $A^k = P \cdot \begin{pmatrix} d_{1,1}^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_{n,n}^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$ cf suites définies par réc. linéaire
- $\exp(A) = P \cdot \begin{pmatrix} \exp(d_{1,1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(d_{n,n}) \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$ cf équa. diff.

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition

On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre (vp) de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lorsque qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ **non nul** tel que $A\,v = \lambda\,v$.

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition

On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre (vp) de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lorsque qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ **non nul** tel que $A\,v = \lambda\,v$.

Definition

On dit qu'un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ **non nul** est un vecteur propre ($\vec{vp}$) de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lorsque que $A\,v = \lambda\,v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

On dit alors que v est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

Polynôme caractéristique

Une valeur propre λ vérifie

$$A\,v = \lambda\,v \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\,v - A\,v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda\,I_n - A)\,v = 0.$$

En notant $B = \lambda\,I_n - A$:

- le système $B\,x = 0$ a au moins 2 solutions v et 0
- donc $B\,x = 0$ a une infinité de solutions et $\det(B) = 0$

Théorème

Les vp de A sont les solutions de l'équation $\det(\lambda\,I_n - A) = 0$.

La valeur $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda\,I_n - A)$ est un polynôme en λ de degré n, appelé polynôme caractéristique.

Valeurs propres – Exemple

Valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Polynôme caractéristique :

$$B = \lambda\, I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -8 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

donc $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - (-2) \cdot (-8) = (\lambda - 1)^2 - 4^2 = (\lambda - 5)\,(\lambda + 3)$

Solutions de $\chi_A(\lambda) = 0$: $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -3$

Vecteurs propres – Exemple

Vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- pour $\lambda_1 = 5$?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 8y = 5x \\ 2x + y = 5y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x = 8y \\ 2x = 4y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2y$

Solutions : $\begin{pmatrix} 2\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Vecteurs propres – Exemple

Vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- pour $\lambda_1 = 5$?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 8y = 5x \\ 2x + y = 5y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x = 8y \\ 2x = 4y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2y$

Solutions : $\begin{pmatrix} 2\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- pour $\lambda_2 = -3$? $\begin{pmatrix} -2\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Réduction d'endomorphisme – Méthode

Diagonalisation de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

1. calculer les n valeurs propres λ_i de A — grâce au poly. carac.
2. trouver pour chaque λ_i un vecteur propre v_i
3. poser $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
4. remplir les colonnes de P avec les v_i dans l'ordre

Remarques :

- solution non unique — ordre des vp, choix des $\vec{\mathrm{vp}}$
- peut ne pas marcher — cf TD

Réduction d'endomorphisme – Exemple

Diagonalisation de $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

1. $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -3$
2. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ par exemple
3. $D = \begin{pmatrix} 5 & \\ & -3 \end{pmatrix}$
4. $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On peut vérifier que $P \cdot D \cdot P^{-1} = A$.