Algèbre – Ensembles, Fonctions

Christophe Mouilleron

école nationale supérieure d'informatique pour l'industrie et l'entreprise

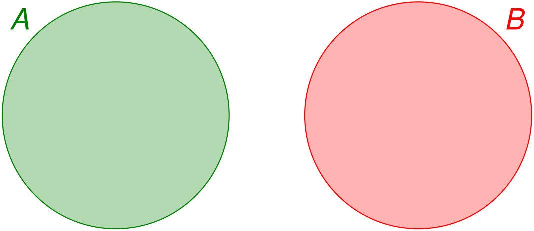
Notations

$x \in X$	l'élément x appartient à l'ensemble X
$x \notin X$	l'élément x n'appartient pas à l'ensemble X
$\emptyset$	ensemble vide
$X \subset Y$	l'ensemble X est inclus dans l'ensemble Y $\rightsquigarrow$ si $e \in X$, alors $e \in Y$
$\mathrm{Card}(X)$	cardinal de l'ensemble $X \simeq$ nb. d'éléments de X
$X \cap Y$	intersection de X et Y $\rightsquigarrow$ si $e \in X \cap Y$, alors $e \in X$ et $e \in Y$
$X \cup Y$	union de X et Y $\rightsquigarrow$ si $e \in X \cup Y$, alors $e \in X$ ou $e \in Y$ non exclusif

Cardinal d'une union disjointe

union disjointe = intersection vide

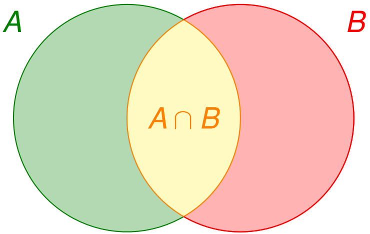
$\cup$ devient $\sqcup$



$$\mathrm{Card}(A \sqcup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

Cardinal d'une union (quelconque)

Cas d'une intersection non vide :

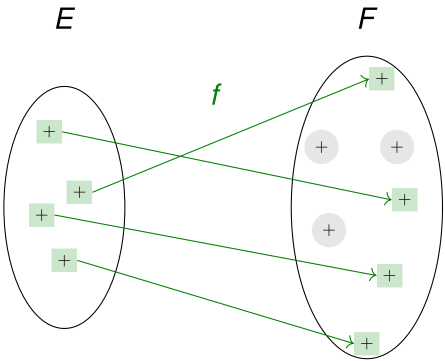


$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

Fonction injective

Définition

On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est injective lorsque, pour tout $y \in F$, il existe au plus une valeur $x \in E$ telle que $f(x) = y$.



$y \in F$ a 0 ou 1 antécédent

si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$

$\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$

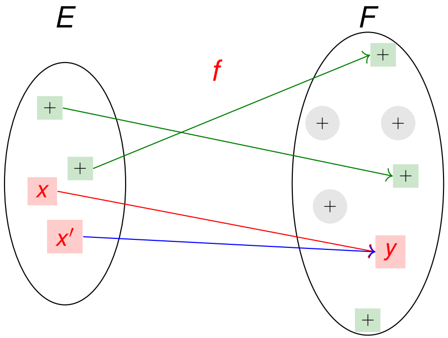
Fonction injective (suite)

Pour montrer que f est injective : parfois dur

$\rightsquigarrow$ on montre $f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$

Pour montrer que f n'est pas injective :

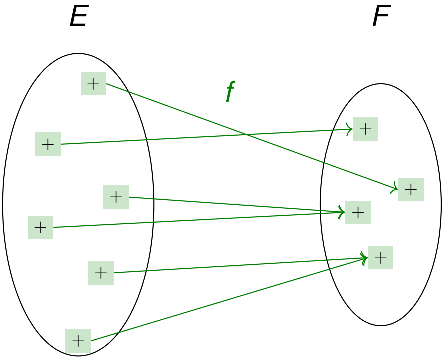
$\rightsquigarrow$ on donne un couple (x, x') tel que $x \neq x'$ mais $f(x) = f(x')$



Fonction surjective

Définition

On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est surjective lorsque, pour tout $y \in F$, il existe au moins une valeur $x \in E$ telle que $f(x) = y$.



$f(x) = y$ a toujours (au moins) une solution

$\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$

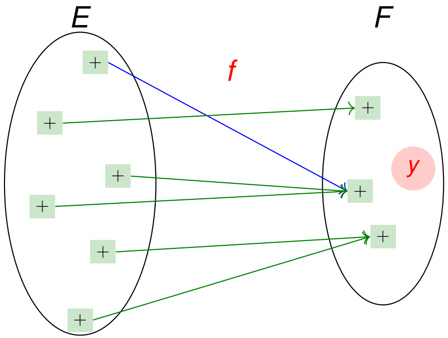
Fonction surjective (suite)

Pour montrer que f est surjective : parfois dur

⇝ on montre $f(x) = y$ a toujours une solution

Pour montrer que f n'est pas surjective :

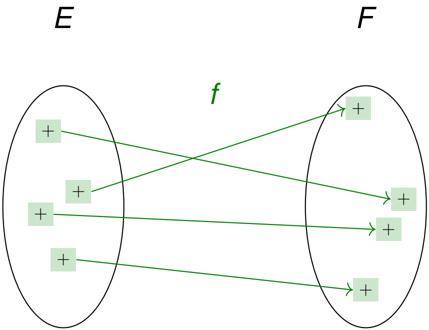
⇝ on donne un élément y tel que $f(x) = y$ n'a pas de solution



Fonction bijective

Définition

On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.



$f(x) = y$ possède une unique solution

$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$

Bijections et cardinal

Intérêt des fonctions bijectives =

- permet de montrer que 2 ensembles ont le même nb. d'éléments
- utile en dénombrement : cf PROB11

  Si $f : E \to F$ bijective et $\mathrm{Card}(E)$ fini,
  on peut calculer $\mathrm{Card}(F)$ pour avoir $\mathrm{Card}(E)$

  $$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$$

Bijections et cardinal

Intérêt des fonctions bijectives =

- permet de montrer que 2 ensembles ont le même nb. d'éléments
- utile en dénombrement : cf PROB11

  Si $f : E \to F$ bijective et $\mathrm{Card}(E)$ fini,
  on peut calculer $\mathrm{Card}(F)$ pour avoir $\mathrm{Card}(E)$

  $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$

- raisonnement possible aussi pour les ensembles infinis

Ensembles dénombrables

Définition

On dit qu'un ensemble E est (infini) dénombrable lorsqu'il existe une bijection $\varphi : E \to \mathbb{N}$.

On peut numéroter les éléments de E :

- $\varphi(e) =$ numéro associé à e
- $\varphi^{-1}(n) =$ élément numéro n

Ensembles dénombrables

Définition

On dit qu'un ensemble E est (infini) dénombrable lorsqu'il existe une bijection $\varphi : E \to \mathbb{N}$.

On peut numéroter les éléments de E :

- $\varphi(e) =$ numéro associé à e
- $\varphi^{-1}(n) =$ élément numéro n

Exemples :

- $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{p \in \mathbb{N}^* | \ p \text{ premier}\}$
- si E_1 et E_2 dénombrables, alors $E_1 \times E_2$ aussi

Exemple d'ensemble non dénombrable

Notation : $\mathcal{P}(E) =$ ensemble des sous-ensembles de E

$\mathcal{P} =$ parties de

Par exemple

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$$

Proposition

L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Preuve par argument diagonal

Supposons $\mathcal{P}(N)$ dénombrable $\rightsquigarrow$ numérotation $p_0, p_1, p_2 \ldots$

Considérons le tableau $T_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in p_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

T	0	1	2	3	4	$\ldots$	
p_0	0	1	1	0	0	$\ldots$	$\{1, 2\}$
p_1	1	0	0	1	1	$\ldots$	$\{0, 3, 4\}$
p_2	1	0	1	0	1	$\ldots$	$2\mathbb{N}$
p_3	0	0	1	1	0	$\ldots$	$\{p \text{ premiers}\}$
p_4	0	0	0	0	0	$\ldots$	$\emptyset$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	

Preuve par argument diagonal

Supposons $\mathcal{P}(N)$ dénombrable $\rightsquigarrow$ numérotation $p_0, p_1, p_2 \ldots$

Considérons le tableau $T_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in p_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $p = \{j \in \mathbb{N} \mid T_{j,j} = 0\}$

T	0	1	2	3	4	$\ldots$	
p_0	0	1	1	0	0	$\ldots$	$\{1, 2\}$
p_1	1	0	0	1	1	$\ldots$	$\{0, 3, 4\}$
p_2	1	0	1	0	1	$\ldots$	$2\mathbb{N}$
p_3	0	0	1	1	0	$\ldots$	$\{p \text{ premiers}\}$
p_4	0	0	0	0	0	$\ldots$	$\emptyset$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	

$p = \{0, 1, 4, \ldots\}$

Preuve par argument diagonal

Supposons $\mathcal{P}(N)$ dénombrable $\rightsquigarrow$ numérotation p_0, p_1, p_2 ...

Considérons le tableau $T_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in p_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $p = \{j \in \mathbb{N} \mid T_{j,j} = 0\}$

$$\begin{array}{c|cccccc r}
T & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \\
\hline
p_0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \{1,2\} \\
p_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \{0,3,4\} \\
p_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 2\mathbb{N} \\
p_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \{p \text{ premiers}\} \\
p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \emptyset \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}$$

$$p = \{0, \quad 1, \qquad\qquad 4, \quad \dots\}$$

$p \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\quad + \quad$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p \neq p_i$ par construction $\quad$ ABSURDE

Remarques sur l'argument diagonal

Argument diagonal = technique très utile

En pratique, pour prouver la non-dénombrabilité de :

- $\{u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ = ens. des suites d'entiers $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$
- $\left\{u : \mathbb{N} \to \{0,1\}\right\}$ = ens. des suites à valeurs binaires $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$
- $[0,1[$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$ non dénombrable

En théorie :

- outil pour preuves d'indécidabilité cf MOCA24 / OPT{U,D}35