

# Algèbre – Fonctions de plusieurs variables

Christophe Moulleron



- 1 Généralisation de la dérivée
- 2 Extrema locaux de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- 3 Intégration de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

- 1 Généralisation de la dérivée
- 2 Extrema locaux de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- 3 Intégration de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

# Exemple introductif

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, -x) \end{aligned}$$

Calculer  $g'(x)$ .

# Exemple introductif

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, -x) \end{aligned}$$

Calculer  $g'(x)$ .

**Difficultés :**

- formule pour  $f$  inconnue
- $f$  = fonction de **deux** variables

# Exemple introductif

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, -x) \end{aligned}$$

Calculer  $g'(x)$ .

**Difficultés :**

- formule pour  $f$  inconnue
- $f =$  fonction de **deux** variables

$g'(x)$  dépendra de la *dérivée* de  $f$   
*dérivée* de  $f$  ???

# Dérivée – Rappels pour le cas $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Soit

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow f =$  fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Sa dérivée est définie par :

quand elle existe

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  
pente de  
 $x_0$  à  $x$

## Dérivée – Cas $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow f =$  fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Sa dérivée est définie par :

quand elle existe

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\rightsquigarrow$  formules valides car  $x, x_0, h$  réels



# Dérivée – Cas $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow f =$  fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Sa dérivée est définie par :

quand elle existe

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\rightsquigarrow$  formules valides car  $x, x_0, h$  réels

**Exemple :**  $m = 2$

dérivation coord. par coord.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ x^3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ f'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$$

# Cas $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow f =$  fonction de **plusieurs variables réelles** à **valeurs réelles**

## Problèmes :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ne convient plus division par un vecteur
- $n$  variables  $\Rightarrow$   **$n$  dérivées**

# Cas $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow f =$  fonction de **plusieurs variables réelles** à **valeurs réelles**

## Problèmes :

- ~~$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ne convient plus~~
- $\bullet n$  variables  $\Rightarrow n$  dérivées

division par un vecteur

**Solution** = vecteur de dérivées

**Exemple :**  $n = 2$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} \rightsquigarrow \nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left( \frac{2x}{y} \quad -\frac{x^2}{y^2} \right)$$

# Vocabulaire, remarques

$\partial$  = d rond

$\nabla$  = nabla

Delta ( $\Delta$ ) renversé

$\nabla_f$  = gradient de  $f$

- fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$
  - souvent écrit sous forme d'un vecteur colonne
- ligne = mieux ici

# Vocabulaire, remarques

$\partial$  = d rond

$\nabla$  = nabla

Delta ( $\Delta$ ) renversé

$\nabla_f$  = gradient de  $f$

- fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$
- souvent écrit sous forme d'un vecteur colonne

ligne = mieux ici

**Attention :** notation  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  malheureuse

$\partial_1 f(x, y)$  préférable

- $x$  lié à la définition de  $f$
- $x$  lié au point courant

1<sup>re</sup> variable de  $f$

1<sup>er</sup> arg. de  $\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f$

$\rightsquigarrow$  même lettre pour deux choses différentes !

# Cas général – Matrice jacobienne

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow f =$  fonction de **plusieurs variables réelles** à **valeurs vectorielles**

On lui associe une **matrice jacobienne** :

$\simeq$  dérivée

$$J_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

# Cas général – Matrice jacobienne

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow f =$  fonction de **plusieurs variables réelles** à **valeurs vectorielles**

On lui associe une **matrice jacobienne** :

$\simeq$  dérivée

$$J_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$m$  sorties  
 $\Rightarrow m$  lignes

$n$  entrées  $\Rightarrow n$  colonnes

# Matrice jacobienne – Exemples

## Exemples :

- si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on a

$$(r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

 $\frac{\partial}{\partial r}$  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 

$$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \phantom{r \cos \theta} \\ \phantom{r \sin \theta} \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow f_1(r, \theta) = r \cos \theta \\ \longleftarrow f_2(r, \theta) = r \sin \theta \end{matrix}$$



# Matrice jacobienne – Exemples

## Exemples :

- si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on a

$$(r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

 $\frac{\partial}{\partial r}$  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 

$$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow f_1(r, \theta) = r \cos \theta \\ \leftarrow f_2(r, \theta) = r \sin \theta \end{array}$$

# Matrice jacobienne – Exemples

## Exemples :

- si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on a

$$(r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow f_1(r, \theta) = r \cos \theta \\ \leftarrow f_2(r, \theta) = r \sin \theta \end{array}$$

- si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $J_f(x) = (f'(x))$

matrice  $1 \times 1$

## Propriété

On a

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \simeq f(x_1, \dots, x_n) + J_f(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

lorsque  $h_1, \dots, h_n$  sont suffisamment petits.

$\rightsquigarrow$  si  $n = 1$ , on retrouve  $f(x + h) \simeq f(x) + hf'(x)$        $f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

# Matrice jacobienne – Propriétés

## Propriété

On a

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \simeq f(x_1, \dots, x_n) + J_f(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

lorsque  $h_1, \dots, h_m$  sont suffisamment petits.

$\rightsquigarrow$  si  $n = 1$ , on retrouve  $f(x + h) \simeq f(x) + h f'(x)$        $f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

## Propriété

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , alors :

$$J_{g \circ f}(x_1, \dots, x_n) = J_g(f(x_1, \dots, x_n)) \times J_f(x_1, \dots, x_n)$$

$\rightsquigarrow$  si  $n = m = p = 1$ , on retrouve  $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$

## Retour à l'exemple introductif

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x, -x) \\ & \xrightarrow{g = f \circ \varphi} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad J_{\varphi}(x) =$$

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad J_f(x, y) =$$

## Retour à l'exemple introductif

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x, -x) \\ & \xrightarrow{g = f \circ \varphi} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow J_{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array} \rightsquigarrow J_f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

## Retour à l'exemple introductif

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x, -x) \\ & \xrightarrow{g = f \circ \varphi} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow J_{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array} \rightsquigarrow J_f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

$$\begin{aligned} J_g(x) &= J_f(\varphi(x)) \times J_{\varphi}(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) \right) \end{aligned}$$

## Retour à l'exemple introductif (suite)

**Bilan :** 
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$$

$f(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x)$ $-\frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$	$g(x) =$ $f(x, -x)$	$g'(x)$
$x + y$					
$xy$					
$x^2 + y^2$					
$y \sin x$					



## Retour à l'exemple introductif (suite)

**Bilan :** 
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$$

$f(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x)$ $-\frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$	$g(x) =$ $f(x, -x)$	$g'(x)$
$x + y$	1	1	$1 - 1 = 0$	0	0
$xy$					
$x^2 + y^2$					
$y \sin x$					

## Retour à l'exemple introductif (suite)

**Bilan :** 
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$$

$f(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x)$ $-\frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$	$g(x) =$ $f(x, -x)$	$g'(x)$
$x + y$	1	1	$1 - 1 = 0$	0	0
$xy$	$y$	$x$	$-x - x = -2x$	$-x^2$	$-2x$
$x^2 + y^2$					
$y \sin x$					

## Retour à l'exemple introductif (suite)

**Bilan :** 
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$$

$f(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x)$ $-\frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$	$g(x) =$ $f(x, -x)$	$g'(x)$
$x + y$	1	1	$1 - 1 = 0$	0	0
$xy$	$y$	$x$	$-x - x = -2x$	$-x^2$	$-2x$
$x^2 + y^2$	$2x$	$2y$	$2x - (-2x) = 4x$	$2x^2$	$4x$
$y \sin x$					

## Retour à l'exemple introductif (suite)

**Bilan :** 
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$$

$f(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x)$ $-\frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$	$g(x) =$ $f(x, -x)$	$g'(x)$
$x + y$	1	1	$1 - 1 = 0$	0	0
$xy$	$y$	$x$	$-x - x = -2x$	$-x^2$	$-2x$
$x^2 + y^2$	$2x$	$2y$	$2x - (-2x) = 4x$	$2x^2$	$4x$
$y \sin x$	$y \cos x$	$\sin x$	$-x \cos x - \sin x$	$-x \sin x$	$-\sin x$ $-x \cos x$

# Plan

- 1 Généralisation de la dérivée
- 2 **Extrema locaux de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$**
- 3 Intégration de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

# Rappels – Cas $n = 1$

Schéma général quand  $n = 1$  :

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- 1 calcul de  $f'$
- 2 résolution de  $f'(x) = 0 \rightsquigarrow$  points critiques
- 3 tableau de variations

Problèmes quand  $n > 1$  :

- $f'$  n'a pas de sens
- variations + complexes

# Rappels – Cas $n = 1$

Schéma général quand  $n = 1$  :

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- 1 calcul de  $f'$
- 2 résolution de  $f'(x) = 0 \rightsquigarrow$  points critiques
- 3 tableau de variations

Problèmes quand  $n > 1$  :

- $f'$  n'a pas de sens
- variations + complexes

$f'$  remplacé par  $\nabla_f$

$\rightsquigarrow$  besoin de dériver deux fois

# Matrice hessienne – Définitions

**Notation :**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

↪ dérivée par rapport à  $x_j$ , puis par rapport à  $x_i$

**Matrice hessienne** de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

≈ dérivée seconde

$$H_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$



# Matrice hessienne – Exemple, Propriété

**Exemple :**  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$

$$\nabla_f(x, y) = \left( \frac{2x}{y} \quad -\frac{x^2}{y^2} \right) \rightsquigarrow H_f(x, y) = \left( \begin{array}{c} \phantom{\frac{2x}{y}} \\ \phantom{-\frac{x^2}{y^2}} \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \frac{\partial}{\partial x} \\ \leftarrow \frac{\partial}{\partial y} \end{array}$$

$n = 2$

$\nabla_f(x, y)$   
↓

# Matrice hessienne – Exemple, Propriété

**Exemple :**  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$

$$\nabla_f(x, y) = \left( \frac{2x}{y} \quad -\frac{x^2}{y^2} \right)$$

$$\rightsquigarrow H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & 2\frac{x^2}{y^3} \end{pmatrix}$$

$n = 2$

$\nabla_f(x, y)$   
↓

←  $\frac{\partial}{\partial x}$   
←  $\frac{\partial}{\partial y}$

# Matrice hessienne – Exemple, Propriété

**Exemple :**  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$

$$\nabla_f(x, y) = \left( \frac{2x}{y} \quad -\frac{x^2}{y^2} \right) \rightsquigarrow H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & 2\frac{x^2}{y^3} \end{pmatrix}$$

$n = 2$

$\nabla_f(x, y)$   
↓

←  $\frac{\partial}{\partial x}$   
←  $\frac{\partial}{\partial y}$

## Propriété

Si  $f$  est suffisamment régulière, on a :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$
- $H_f(x_1, \dots, x_n)$  est symétrique par rapport à sa diagonale principale

↪ ordre des dérivées sans importance en pratique

# Condition suffisante pour un ??? local

Cas  $n = 1$

$$f'(x^*) = 0$$

$$f''(x^*) > 0$$

# Condition suffisante pour un ??? local

Cas  $n = 1$

$$f'(x^*) = 0$$

$$f''(x^*) > 0$$

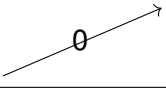
$x$	$x^*$
$f$	
$f'(x)$	0
$f'$	
$f''(x)$	+

# Condition suffisante pour un ??? local

Cas  $n = 1$

$$f'(x^*) = 0$$

$$f''(x^*) > 0$$

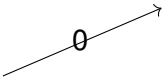
$x$	$x^*$
$f$	
$f'(x)$	0
$f''$	
$f''(x)$	+

# Condition suffisante pour un ??? local

Cas  $n = 1$

$$f'(x^*) = 0$$

$$f''(x^*) > 0$$



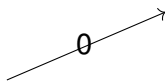
$x$	$x^*$		
$f$			
$f'(x)$	-	0	+
$f'$			
$f''(x)$	+		

# Condition suffisante pour un minimum local

Cas  $n = 1$

$$f'(x^*) = 0$$

$$f''(x^*) > 0$$

$x$	$x^*$		
$f$		$\alpha$	
$f'(x)$	-	0	+
$f'$	 0		
$f''(x)$	+		



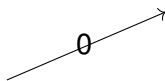


# Condition suffisante pour un minimum local

Cas  $n = 1$

$$f'(x^*) = 0$$

$$f''(x^*) > 0$$

$x$	$x^*$	
$f$		
$f'(x)$	-	+
$f'$		
$f''(x)$	+	

Cas général

$$\nabla_f(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0$$

$$\lambda > 0$$

pour chaque valeur propre  
 $\lambda$  de  $H_f(x_1^*, \dots, x_n^*)$



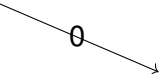
$f$  strictement convexe

# Condition suffisante pour un maximum local

Cas  $n = 1$

$$f'(x^*) = 0$$

$$f''(x^*) < 0$$

$x$	$x^*$		
$f$		$\alpha$	
$f'(x)$	+	0	-
$f'$			
$f''(x)$	-		

Cas général

$$\nabla_f(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0$$

$$\lambda < 0$$

pour chaque valeur propre  
 $\lambda$  de  $H_f(x_1^*, \dots, x_n^*)$

$f$  strictement concave

Pour chercher les extrema de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  :

- 1 calculer  $\nabla_f$
- 2 résoudre  $\nabla_f(x_1, \dots, x_n) = 0$  pour trouver les points critiques
- 3 pour chaque point critique  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  :
  - ▶ calculer  $H_f(x_1^*, \dots, x_n^*)$
  - ▶ trouver ses valeurs propres
  - ▶ conclure en fonction des signes de ces valeurs propres

Conclusions possibles :

- toutes les vp  $> 0 \Rightarrow$  minimum local  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$
- toutes les vp  $< 0 \Rightarrow$  maximum local  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$
- une vp  $> 0$  + une vp  $< 0 \Rightarrow$  point col
- une vp nulle  $\Rightarrow$  tout est possible

point-scelle

# Plan

- 1 Généralisation de la dérivée
- 2 Extrema locaux de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- 3 Intégration de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_D f(x, y) \, d(x, y) \quad \text{où } D \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

- intégrabilité ?
- calcul ?

$$\iint_D f(x, y) \, d(x, y) \quad \text{où } D \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

- intégrabilité ?
- calcul ?

$$\text{lorsque } \iint_D |f(x, y)| \, d(x, y) < +\infty$$

## Théorème de Fubini-Tonelli

Si  $f : D_x \times D_y \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable, alors

$D = \text{rectangle}$

$$\iint_{D_x \times D_y} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{D_x} \left( \int_{D_y} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{D_y} \left( \int_{D_x} f(x, y) \, dx \right) dy$$

# Intégrales doubles – Cas de variables séparables

$$\iint_D xy \, d(x, y) \quad \text{où } D = \{ (x, y), 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 1 \leq y \leq 3 \}$$

- $0 \leq xy \leq 6$  sur le carré  $D = [0, 2] \times [1, 3]$

↪  $xy$  intégrable sur  $D$

$$\iint_D |xy| \, d(x, y) \leq 6 \times 2 \times 2 < +\infty$$

# Intégrales doubles – Cas de variables séparables

$$\iint_D xy \, d(x, y) \quad \text{où } D = \{ (x, y), 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 1 \leq y \leq 3 \}$$

- $0 \leq xy \leq 6$  sur le carré  $D = [0, 2] \times [1, 3]$

$\rightsquigarrow xy$  intégrable sur  $D$   $\iint_D |xy| \, d(x, y) \leq 6 \times 2 \times 2 < +\infty$

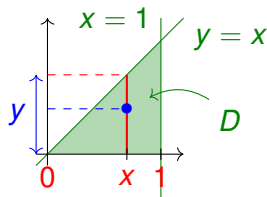
- calcul en **séparant les variables** :

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, d(x, y) &= \int_{y=1}^3 \left( \int_{x=0}^2 xy \, dx \right) dy = \int_{y=1}^3 \left( y \int_{x=0}^2 x \, dx \right) dy \\ &= \left( \int_{x=0}^2 x \, dx \right) \left( \int_{y=1}^3 y \, dy \right) = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_1^3 = \frac{4}{2} \frac{9-1}{2} = 8 \end{aligned}$$



# Intégrales doubles – Cas d'un domaine simple

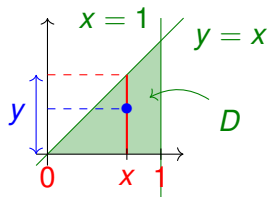
$$I = \iint_D x \, d(x, y) \quad \text{où } D = \{ (x, y), 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x \}$$



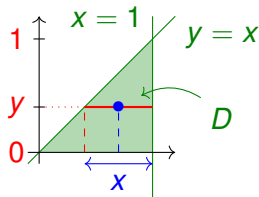
$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

# Intégrales doubles – Cas d'un domaine simple

$$I = \iint_D x \, d(x, y) \quad \text{où } D = \{ (x, y), 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x \}$$



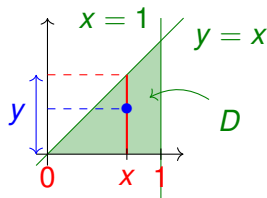
$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



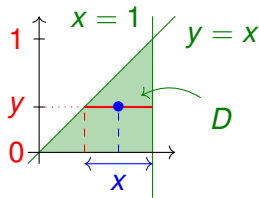
$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 x \, dx \, dy \\ &= \int_{y=0}^1 \frac{1-y^2}{2} \, dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

# Intégrales doubles – Cas d'un domaine simple

$$I = \iint_D x \, d(x, y) \quad \text{où } D = \{ (x, y), 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x \}$$



$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 x \, dx \, dy \\ &= \int_{y=0}^1 \frac{1-y^2}{2} \, dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**ATTENTION** aux bornes  $\rightsquigarrow$  faire un dessin

## Théorème

Si  $\varphi : D \rightarrow D'$  est un  $C^1$ -difféomorphisme =  
 $(u, v) \mapsto (x, y)$

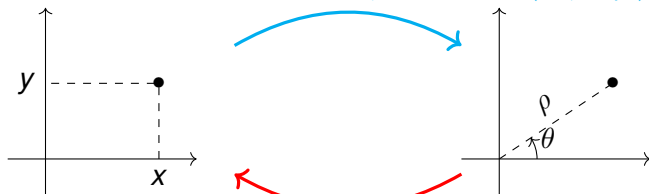
- $\varphi$  est bijective
- $\varphi$  est  $C^1$  = ses dérivées partielles existent et sont continues
- $\varphi^{-1}$  est  $C^1$

alors on a  $\iint_{D'} f(x, y) d(x, y) = \iint_D f(\varphi(u, v)) \left| \det J_\varphi(u, v) \right| d(u, v)$

où  $J_\varphi(u, v) =$  **matrice jacobienne** de  $\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$

# Exemple : passage en coordonnées polaires (1)

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi] \\ (x, y) &\mapsto \left( \sqrt{x^2+y^2}, 2 \arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \right)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (\rho, \theta) &\mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)\end{aligned}$$

$$|\det(\mathbf{J}_\varphi)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \right| = |\rho(\cos \theta)^2 + \rho(\sin \theta)^2| = \rho$$

## Exemple : passage en coordonnées polaires (2)

Calcul de l'aire d'un disque de rayon  $r$  :

- $D = \{ (x, y), 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2 \}$
- $f(x, y) = 1$

$$0 \leq |x + iy|^2 \leq r^2$$

chaque point compte pour 1

$$\begin{aligned} \iint_D d(x, y) &= \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \left( \int_{\rho=0}^r \rho \, d\rho \right) \left( \int_{\theta=-\pi}^{\pi} d\theta \right) \\ &= \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^r [\theta]_{-\pi}^{\pi} = \frac{r^2}{2} (\pi - (-\pi)) = \pi r^2 \end{aligned}$$

## Exemple : passage en coordonnées polaires (3)

Calcul de  $\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) d(x, y)$  :

fct. continue en  $(0, 0)$

$$\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} = \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$$

$$\begin{aligned} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 - y^2) dy dx &= \int_{\rho=0}^{+\infty} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \exp(-\rho^2) \rho d\theta d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^{+\infty} 2\pi \rho \exp(-\rho^2) d\rho \\ &= \left[ -\pi \exp(-\rho^2) \right]_{\rho=0}^{+\infty} = \pi \end{aligned}$$

## Bonus pour le cours de proba.

$$\text{Soit } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx.$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) dy \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) d(x, y) = \pi \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I = \sqrt{\pi}.$$

Ainsi, pour tout  $\sigma > 0$  et en posant  $t = x \sigma \sqrt{2}$  :

$$\frac{dt}{dx} = \sigma \sqrt{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \sigma \sqrt{2} dx = I \sigma \sqrt{2} = \sigma \sqrt{2\pi}$$



# Bilan sur les intégrales multiples

Intégrales doubles = représentatif du cas général

Pour les intégrales multiples :

- notations similaires pour  $n = 3$
- notations allégées pour  $n \geq 4$
- techniques de calculs similaires :
  - 1 variable par variable
  - 2 changement de variables

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\iiint$$

Fubini  
jacobienne  $n \times n$