Formulaire d'algèbre et géomètrie

Addition et multiplication

Si a, b et c sont des nombres (entiers, réels ou complexes), on a :

éléments neutres	$0 + a = a + 0 = a$	$1 \times a = a \times 1 = a$
associativité	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
commutativité	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
distributivité	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

opposé	$a + (-a) = 0$	$-(-a) = a$	$(-1) \times a = -a$
inverse	$a \times \frac{1}{a} = 1$	$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$	$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

absorption	$0 \times a = a \times 0 = 0$
intégrité	$a \times b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$ ou $b = 0$.

Fraction

Si a, b, c et d sont des nombres (entiers, réels ou complexes), on a :

addition	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$	(à simplifier)
produit	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$	(à simplifier)
division	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$	(à simplifier)

Puissance

Si a et b sont des nombres, et si m et n sont des <u>entiers</u>, on a :

cas particulier	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	
produit de puissances	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
division de puissances	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
puissance de puissance	$(a^m)^n = a^{(m \times n)}$	

Si a est un <u>réel strictement positif</u> et x un réel, on a :

définition	$a^x = \exp(x \times \ln a)$	
cas particuliers	$a^{1/2} = \sqrt{a}$	$a^{1/n} = \sqrt[n]{x}$
propriétés	cf paragraphe précédent	

Exponentielle et logarithme

Si x et y sont des réels, on a :

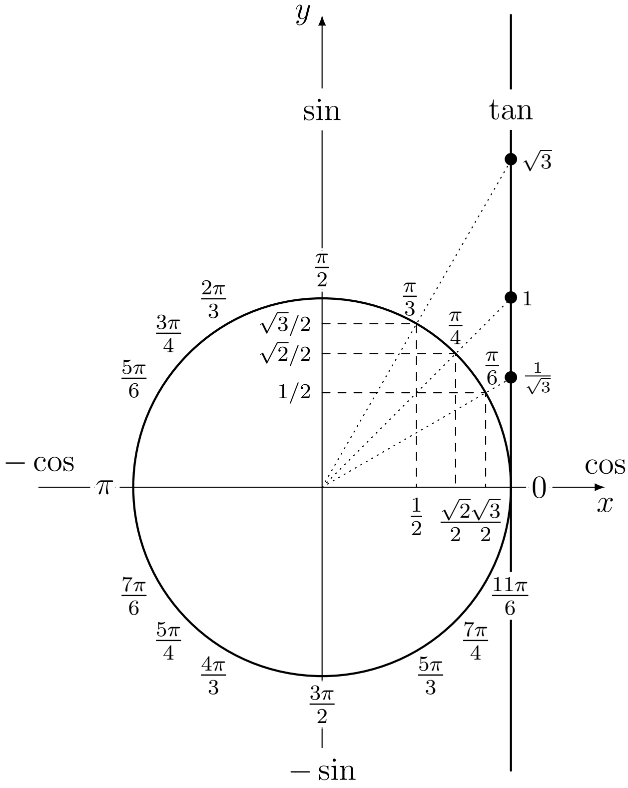
exponentielle d'une somme	$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
logarithme d'une exponentielle	$\ln(\exp(x)) = x$
puissance d'une exponentielle	$(\exp(x))^y = \exp(x \times y)$

Si x et y sont des réels strictement positifs et z un réel, on a :

logarithme d'un produit	$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
exponentielle d'un logarithme	$\exp(\ln(x)) = x$
logarithme d'une puissance	$\ln(x^z) = z \times \ln(x)$

Note : Cela reste vrai si on remplace $\exp(\star)/\ln(\star)$ par $2^\star/\log_2(\star)$, ou par $10^\star/\log(\star)$.

Cercle trigonométrique



x	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	–
π	-1	0	0

x	$\arccos x$	$\arcsin x$	$\arctan x$
$-\sqrt{3}$	–	–	$-\frac{\pi}{3}$
-1	π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	≈ -0.464
0	$\frac{\pi}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	≈ 0.464
1	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	–	–	$\frac{\pi}{3}$

Formules de trigonométrie

Définitions :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Propriété fondamentale :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Symétries :

$$\begin{array}{lll}
\cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x) & \tan(-x) = -\tan(x) \\
\cos(x+\pi) = -\cos(x) & \sin(x+\pi) = -\sin(x) & \tan(x+\pi) = \tan(x) \\
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) &
\end{array}$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\ \tan(y)}
\end{aligned}$$

Cas particuliers (utiles en pratique) :

$$\begin{aligned}
&\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \\
&\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)
\end{aligned}$$

Expressions en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (utiles pour intégrer) :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Fonctions hyperboliques et leurs inverses

Définitions :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Propriétés :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad \cosh(ix) = \cos(x) \qquad \sinh(ix) = i\ \sin(x)$$

Fonctions hyperboliques inverses :

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Nombres complexes

Si $z = a + ib$ avec a et b réels, et si n est un entier, on a :

parties réelle et imaginaire $\mathrm{Re}(z) = a$ $\quad \mathrm{Im}(z) = b$

conjugué $\overline{z} = a - ib$

module et argument $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \times \text{signe}(b) & \text{si } a = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \ [\pi] & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$

forme exponentielle $z = |z|\, e^{i \arg(z)} = |z| \cdot \left[\cos\big(\arg(z)\big) + i \sin\big(\arg(z)\big)\right]$

Formules avec le conjugué :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

Formules avec le module :

$$|zz'| = |z|\,|z'| \qquad |z^n| = |z|^n \qquad |z| = |\overline{z}| \qquad |z|^2 = z\overline{z}$$

Inégalité triangulaire : $\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$

Formules avec l'argument :

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \qquad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z) \ [2\pi] \qquad \arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$$

Résolution de $az^2 + bz + c = 0$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$ **Solutions :** $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} & \text{si } \Delta = 0, \\ \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{sinon.} \end{cases}$

Dénombrement

permutations à n éléments $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

arrangements de k éléments parmi n $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$

combinaisons de k éléments parmi n $\mathrm{C}_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Formules utiles : $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k} \qquad \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^{k} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$