

## TD 0 : Récurrences

### Exercice 1 - Résultats classiques

Démontrer les relations suivantes en utilisant le principe de récurrence.

$$1.1 \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1.4 \quad \sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2$$

$$1.2 \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1.5 \quad \sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$1.3 \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$1.6 \quad \sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

### Exercice 2 - Récurrences simples

**2.1** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1 + \sqrt{2})^n$  s'écrit sous la forme  $a_n + b_n\sqrt{2}$ , où  $a_n$  est un entier impair et  $b_n$  est un entier.

**2.2** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'entier  $2^{3n} - 1$  est divisible par 7.

**2.3** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'entier  $2^{2n} + 15n - 1$  est divisible par 9.

**2.4** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $\sum_{k=0}^n C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$ .

**2.5** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $2^{n-1} \leq n!$ .

**2.6** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $n! \leq n^n$ .

**2.7** Soit  $a \geq -1$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $(1+a)^n \geq 1+na$ .

### Exercice 3 - L'abus de récurrence est mauvais pour la santé

Expliquer précisément pourquoi les raisonnements suivants sont faux.

**3.1** Il y a autant d'argent que je veux sur mon compte en banque.

**Preuve.** Montrons par récurrence sur  $n$  qu'il y a  $n$  euros sur mon compte en banque :

- Je suppose que la propriété est vraie pour  $n' < n$ . En particulier, il y a par hypothèse de récurrence  $n - 2$  euros sur mon compte en banque ( $n' = n - 2$ ). De même, il y a aussi  $n - 1$  euros. Ainsi,  $n = (n - 1) + 1 = (n - 2) + 1 = n - 1$ . Donc j'ai bien aussi  $n$  euros.

**3.2** Tous les crayons dans ma trousse sont de la même couleur.

**Preuve** par récurrence sur le nombre de crayons :

- Si j'ai moins de 2 crayons dans la trousse, c'est bon.
- Sinon, je retire 2 des  $n$  crayons au hasard. Si j'en remets un, les  $n - 1$  crayons de la trousse sont de la même couleur (hypothèse de récurrence). Même conclusion si je remets l'autre. Donc mes  $n$  crayons sont bien de la même couleur.

#### Exercice 4 - Récurrences doubles

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = u_1 = 1$  et  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$  pour tout  $n \geq 2$ .

**4.1** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$ .

**4.2** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , on a  $u_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^n$ .

**4.3** On considère maintenant la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = 1$  et  $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$ .  
Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_n = 3^n - 2^n$ .