TD 1 : Calcul matriciel

Exercice 1 - Opérations simples sur les matrices

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer lorsque cela a du sens les quantités suivantes.

1.1 $2\,A$

1.2 $B + I_3$

1.3 $A + B$

1.4 $A\,B$

1.5 $B\,A$

1.6 A^t

1.7 $I_2\,A$

1.8 $J_2\,A$

1.9 $A\,I_3$

1.10 $A\,A^t$

1.11 $D\,B$

1.12 $B\,D$

Exercice 2 - Calculs de déterminants

Calculer les déterminants des matrices suivantes. À quelle(s) condition(s) sont-elles inversibles ?

2.1 $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2.2 $M_2 = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$

2.3 $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & -1 & 1 & \\ & 1 & -1 & \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix}$

2.4 $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$

Exercice 3 - Calculs d'inverses de matrice

Pour chacune des matrices suivantes, dire à quelle condition le déterminant est non-nul, puis calculer l'inverse de la matrice.

3.1 $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3.2 $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

3.3 $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

3.4 $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$

 christophe.mouilleron@ensiie.fr

Exercice 4 - Calcul matriciel et interpolation polynomiale.

On considère le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

4.1 Calculer $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$.

4.2 Calculer $A \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$. Comparer le résultat avec celui de la question précédente, et commenter.

4.3 Calculer $\det(A)$ afin de vérifier qu'il est non nul, puis calculer A^{-1}.

4.4 En déduire les coefficients de $P(x)$, sachant que $P(0) = P(1) = 2$ et $P(-1) = P(2) = 6$.