

## TD 1 : Calcul matriciel

### Exercice 1 - Opérations simples sur les matrices

On considère les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 J_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**1.1** Calculer lorsque cela a du sens les quantités suivantes.

- |               |           |             |            |
|---------------|-----------|-------------|------------|
| (a) $2A$      | (d) $AB$  | (g) $I_2 A$ | (j) $AA^t$ |
| (b) $B + I_3$ | (e) $BA$  | (h) $J_2 A$ | (k) $DB$   |
| (c) $A + B$   | (f) $A^t$ | (i) $AI_3$  | (l) $BD$   |

### Exercice 2 - Calculs de déterminants

Calculer les déterminants des matrices suivantes. À quelle(s) condition(s) sont-elles inversibles ?

<p><b>2.1</b> <math>M_1 = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ 2 &amp; 3 &amp; 4 \\ 3 &amp; 4 &amp; 5 \end{pmatrix}</math></p>	<p><b>2.3</b> <math>M_3 = \begin{pmatrix} 1 &amp; C_n^1 &amp; C_n^2 \\ 1 &amp; C_{n+1}^1 &amp; C_{n+1}^2 \\ 1 &amp; C_{n+2}^1 &amp; C_{n+2}^2 \end{pmatrix}</math></p>
<p><b>2.2</b> <math>M_2 = \begin{pmatrix} 1 &amp; &amp; &amp; 1 \\ &amp; -1 &amp; 1 &amp; \\ &amp; &amp; 1 &amp; -1 \\ 1 &amp; &amp; &amp; -1 \end{pmatrix}</math></p>	<p><b>2.4</b> <math>M_4 = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 1 &amp; -1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 1 &amp; 1 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; a &amp; a^2 &amp; a^3 \end{pmatrix}</math></p>

### Exercice 3 - Calculs d'inverses de matrice

Pour chacune des matrices suivantes, dire à quelle condition le déterminant est non-nul, puis calculer l'inverse de la matrice.

<p><b>3.1</b> <math>M_1 = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ 2 &amp; 3 &amp; 4 \\ 1 &amp; 3 &amp; 4 \end{pmatrix}</math></p>	<p><b>3.3</b> <math>M_3 = \begin{pmatrix} 3 &amp; 2 &amp; 1 \\ 2 &amp; 1 &amp; \\ 1 &amp; &amp; \end{pmatrix}</math></p>
<p><b>3.2</b> <math>M_2 = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; &amp; \\ &amp; 1 &amp; 1 &amp; \\ &amp; &amp; 1 &amp; 1 \\ &amp; &amp; &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p>	<p><b>3.4</b> <math>M_4 = \begin{pmatrix} 1 &amp; &amp; &amp; \\ &amp; 1 &amp; &amp; \\ &amp; &amp; 1 &amp; \\ d &amp; c &amp; b &amp; a \end{pmatrix}</math></p>

**Exercice 4 - Calcul matriciel et interpolation polynomiale (examen 2023-2024)**

On considère le polynôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$  et la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ .

**4.1** Calculer  $P(2)$ ,  $P(3)$ , et  $P(1) - P(-1)$ .

**4.2** Calculer  $A \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ . Comparer le résultat avec celui de la question précédente, et commenter.

**4.3** Calculer  $\det(A)$  et  $A^{-1}$  à l'aide de la méthode par pivot de Gauss.

**4.4** En utilisant ce qui précède, trouver  $P(x)$  sachant que  $P(1) = P(-1)$ ,  $P(2) = 1$  et  $P(3) = 6$ .