TD 2 : Diagonalisaton de matrices

Exercice 1 - Calculs d'espaces propres

Pour chacune des matrices suivantes, calculer le polynôme caractéristique, puis déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés.

1.1 $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

1.2 $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1.3 $A_3 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -40 & 30 & -9 \end{pmatrix}$

1.4 $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 - Applications aux suites définies par des récurrences linéaires

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ \forall\, n \geq 0,\ u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 6\,u_n. \end{cases}$

2.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

2.2 Calculer les valeurs propres de A et les espaces propres associés.

2.3 En déduire une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

2.4 Grâce à la question précédente, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2.5 En déduire la valeur de u_n en fonction de n uniquement.

Exercice 3 - Réduction d'endomorphismes et récurrences linéaires

En appliquant la méthode vue à l'exercice 2, trouver une forme dépendant de n uniquement pour les suites suivantes.

3.1 $\begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_1 &= 1, \\ u_{n+2} &= 5\,u_{n+1} - 4\,u_n \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$

3.2 $\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_1 &= -2, \\ u_2 &= 2, \\ u_{n+3} &= 6\,u_{n+2} - 11\,u_{n+1} + 6\,u_n \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} u_{n+1} &= u_n - 2\,v_n \\ v_{n+1} &= v_n - 2\,u_n \end{cases}$ pour $n > 0$, avec $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$.

3.4 $\begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_1 &= 3, \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + 2\,u_n \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$

Exercice 4 - Cas d'une matrice non diagonalisable

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$.

4.1 Trouver les valeurs propres de A, ainsi que des vecteurs propres associés.

4.2 Quel problème rencontre-t-on si on essaie de mettre la matrice A sous la forme $P\,D\,P^{-1}$?

4.3 On note λ la valeur propre de A, et $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$ un vecteur propre associé. Nous allons chercher une décomposition de la forme

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}.$$

Montrer que le vecteur $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)$ vérifie $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$.

4.4 En déduire une valeur possible pour v_2. De même, trouver une valeur pour $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)$.

4.5 Calculer alors P^{-1}, et vérifier que le produit $P\,T\,P^{-1}$ est bien égal à A.

4.6 Soit $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer N^2, puis N^3. Que constatez-vous ?

4.7 Calculer $(\lambda I_3 + N)^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton. En déduire A^n.