

TD 3 : Ensembles, fonctions

Exercice 1 - Cours de langue

Sur un total de 1500 inscrits, 950 étudiants suivent les cours de japonais, 520 suivent les cours de chinois et 250 font du portugais.

En fait, 400 étudiants font à la fois japonais et chinois, 150 font japonais et portugais, 130 font chinois et portugais. Il y a d'ailleurs 100 étudiants qui sont inscrits à tous les cours de langue.

1.1 Combien y a-t-il d'étudiants ne faisant que du japonais ? que du chinois ? que du portugais ?

1.2 Combien d'étudiants ne suivent aucun cours de langue ?

Exercice 2 - Vrai ou faux ?

Dans cet exercice, $n\mathbb{Z}$ représente l'ensemble des entiers multiples de n : $n\mathbb{Z} = \{kn, k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Corriger l'affirmation lorsqu'elle est fausse, et justifier lorsqu'elle est vraie.

2.1 Entre 0 et 100, il y a plus d'entiers pairs que d'entiers multiples de trois.

2.2 Il y a plus d'entiers pairs que d'entiers multiples de trois.

2.3 On a $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$.

2.4 Les entiers se terminant par 0 sont tous dans $5\mathbb{Z}$.

2.5 On a $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 24\mathbb{Z}$.

Exercice 3 - Injections, surjections, bijections

Pour chacune des fonctions suivantes, dire s'il s'agit d'une injection, d'une surjection, d'une bijection (ou de rien du tout).

3.1 $f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$

3.2 $f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto x^2$

3.3 $f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto 2 - n$

3.4 $f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto 2n + 1$

3.5 $f_5 : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$
 $(m, n) \mapsto m + n$

3.6 $f_6 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

3.7 $f_7 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$
 $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$

3.8 $f_8 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $(m, n) \mapsto \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$

Exercice 4 - Principe d'inclusion-exclusion

4.1 À l'aide d'un dessin, justifier la formule suivante :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

4.2 Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4.3 Redémontrer la formule de la question 1 par le calcul.

note : Utiliser la question précédente, ainsi que la formule $\text{Card}(X \cup Y) = \text{Card}(X) + \text{Card}(Y) - \text{Card}(X \cap Y)$ avec des valeurs pour X et Y bien choisies.

4.4 Trouver, à l'aide d'un dessin ou d'un calcul, une formule pour $\text{Card}(A \cup B \cup C \cup D)$.

4.5 Soit n un entier strictement positif. Proposer une formule générale pour le cardinal d'une union de n ensembles.