Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

TD 4 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 - Calculs de dérivées

1.1 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^∞.

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

(i) $a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\cos x, \sin x) \end{array}$

(ii) $b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x, x^2, x^3) \end{array}$

(iii) $c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & f\left(x + \frac{h}{2}, y + 3h\right) \end{array}$

1.2 Vérifiez vos réponses avec $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $g(x, y, z) = x\,y\,z$.

Exercice 2 - Extrema d'une fonction à deux variables (examen 2023-2024)

Pour tout réel x, on considère la matrice $M_x = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$.

2.1 Calculer le déterminant de M_x en fonction de x, et dire à quelle condition sur x la matrice est inversible.

2.2 Trouver les valeurs propres de $M_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, ainsi qu'un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

2.3 Trouver les valeurs propres de $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, ainsi qu'un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

2.4 Dans le cas général, quelles sont les valeurs propres de M_x et les vecteurs propres associés ?

2.5 **En utilisant ce qui précède**, trouver les extrema locaux de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^3 + y^3 - 3xy \end{array}.$$

Exercice 3 - Extrema de fonctions à plusieurs variables

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques puis les extrema locaux.

3.1 $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2\,x^2 + y^2 - 2\,x\,y - 2\,x - 2 \end{array}$

3.2 $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{4}x^3 \end{array}$

3.3 $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & (1 + x^2 + y^2)\,\exp(z^2) \end{array}$

Exercice 4 - Un calcul par intégrales simples

On considère la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

4.1 Calculer la dérivée de $g(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ par rapport à y.

4.2 En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

4.3 Calculer maintenant la valeur de $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

4.4 Que pouvez-vous dire sur la fonction f ?

Exercice 5 - Centre de gravité d'un quart de disque **(examen 2023-2024)**

Le but de cet exercice est de déterminer le centre de gravité de l'ensemble

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y \text{ et } x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

5.1 Représenter graphiquement l'ensemble D.

5.2 Calculer $A = \iint_D d(x,y)$. Poser $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

5.3 Calculer $X = \iint_D x\,d(x,y)$. Poser $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

5.4 Calculer $Y = \iint_D y\,d(x,y)$. Poser $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

5.5 On rappelle que le centre de gravité de D est le point G de coordonnées $\left(\frac{X}{A}, \frac{Y}{A}\right)$.
Calculer les coordonnées de G, placer G sur le dessin produit à la question 1 et commenter.
note : On pourra utiliser les valeurs approchées $3\pi \simeq 10$ et $\sqrt{2} \simeq 1.5$.

Exercice 6 - Intégrales multiples

Calculer la valeur des intégrales multiples suivantes.

6.1 $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}(x,y)$ sur $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0 \text{ et } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$.

6.2 $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}(x,y)}{(x+y)^3}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1<x,\ 1<y \text{ et } x+y<3\}$.

6.3 $\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{d}(x,y)$ où $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

6.4 $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}(x,y)$ où $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x,\ \frac{\pi}{2} \leq y,\ x+y \leq \pi\}$.

6.5 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\,\mathrm{d}(x,y)$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4,\ y \geq 0, \text{ et } xy \leq 1\right\}$.
note : On commencera par représenter graphiquement l'ensemble D.