

TD 4 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 - Calculs de dérivées

1.1 Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^∞ .

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

(i) $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(\cos x, \sin x)$

(ii) $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto g(x, x^2, x^3)$

(iii) $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $h \mapsto f\left(x + \frac{h}{2}, y + 3h\right)$

1.2 Vérifiez vos réponses avec $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $g(x, y, z) = x y z$.

Exercice 2 - Extrema de fonctions à plusieurs variables

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques puis les extrema locaux.

2.1 $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2$

2.2 $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$

2.3 $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto (1 + x^2 + y^2) \exp(z^2)$

Exercice 3 - Un calcul par intégrales simples

On considère la fonction $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

3.1 Calculer la dérivée de $g(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ par rapport à y .

3.2 En déduire la valeur de $\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 f(x, y) dy \right) dx$.

3.3 Calculer maintenant la valeur de $\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 f(x, y) dx \right) dy$.

3.4 Que pouvez-vous dire sur la fonction f ?

Exercice 4 - Intégrales multiples

Calculer la valeur des intégrales multiples suivantes.

4.1 $\iint_D \frac{d(x, y)}{1 + x^2 + y^2}$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4.2 $\iint_D xy \, d(x, y)$ sur $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$.

4.3 $\iint_D \frac{d(x, y)}{(x + y)^3}$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x, 1 < y \text{ et } x + y < 3\}$.

4.4 $\iint_D \cos(x + y) \, d(x, y)$ où $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, \frac{\pi}{2} \leq y, x + y \leq \pi\}$.

4.5 $\iint_D d(x, y)$ où $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 4, 1 \leq 2x - y \leq 4\}$.

note : On posera $u = x + y$ et $v = 2x - y$.

4.6 $\iint_D x \, d(x, y)$ où $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 4, 1 \leq 2x - y \leq 4\}$.

4.7 $\iint_D y \, d(x, y)$ où $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 4, 1 \leq 2x - y \leq 4\}$.

4.8 $\iint_D xy(x^2 + y^2) \, d(x, y)$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y, 1 \leq xy \leq 2, y^2 - x^2 < 1\}$.

note : On posera $u = xy$ et $v = y^2 - x^2$.