

## TD 4 : Fonctions de plusieurs variables

### Exercice 1 - Calculs de dérivées

1.1 Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^\infty$ .

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

(i)  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(\cos x, \sin x)$

(ii)  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto g(x, x^2, x^3)$

(iii)  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $h \mapsto f\left(x + \frac{h}{2}, y + 3h\right)$

1.2 Vérifiez vos réponses avec  $f(x, y) = x^2 + y^2$  et  $g(x, y, z) = x y z$ .

### Exercice 2 - Extrema de fonctions à plusieurs variables

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques puis les extrema locaux.

2.1  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2$

2.2  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$

2.3  $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto (1 + x^2 + y^2) \exp(z^2)$

### Exercice 3 - Un calcul par intégrales simples

On considère la fonction  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ .

3.1 Calculer la dérivée de  $g(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$  par rapport à  $y$ .

3.2 En déduire la valeur de  $\int_{x=0}^1 \left( \int_{y=0}^1 f(x, y) dy \right) dx$ .

3.3 Calculer maintenant la valeur de  $\int_{y=0}^1 \left( \int_{x=0}^1 f(x, y) dx \right) dy$ .

3.4 Que pouvez-vous dire sur la fonction  $f$  ?

### Exercice 4 - Intégrales multiples

Calculer la valeur des intégrales multiples suivantes.

4.1  $\iint_D \frac{d(x,y)}{1+x^2+y^2}$  où  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

4.2  $\iint_D xy \, d(x,y)$  sur  $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$ .

4.3  $\iint_D \frac{d(x,y)}{(x+y)^3}$  où  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x, 1 < y \text{ et } x+y < 3\}$ .

4.4  $\iint_D \cos(x+y) \, d(x,y)$  où  $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x, \frac{\pi}{2} \leq y, x+y \leq \pi\}$ .

4.5  $\iint_D d(x,y)$  où  $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x+y \leq 4, 1 \leq 2x-y \leq 4\}$ .

**note :** On posera  $u = x+y$  et  $v = 2x-y$ .

4.6  $\iint_D x \, d(x,y)$  où  $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x+y \leq 4, 1 \leq 2x-y \leq 4\}$ .

4.7  $\iint_D y \, d(x,y)$  où  $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x+y \leq 4, 1 \leq 2x-y \leq 4\}$ .

4.8  $\iint_D xy(x^2+y^2) \, d(x,y)$  où  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y, 1 \leq xy \leq 2, y^2 - x^2 < 1\}$ .

**note :** On posera  $u = xy$  et  $v = y^2 - x^2$ .