Analyse – Nombres complexes

Christophe Mouilleron

école nationale supérieure d'informatique pour l'industrie et l'entreprise

Prérequis et objectifs

Prérequis :

- calcul algébrique élémentaire
- cercle trigonométrique

Objectifs :

- définition de $\mathbb{C}$
- résolutions d'équations simples dans $\mathbb{C}$
- application à la factorisation de polynômes
- application à la trigonométrie
- application en géomètrie

Motivation

Comment résoudre $x^2 + 1 = 0$?

Dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

$\rightsquigarrow$ pas de solution !

Motivation

Comment résoudre $x^2 + 1 = 0$?

Dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

$\rightsquigarrow$ pas de solution !

Idée : poser i tel que $i^2 = -1$.

i = nombre imaginaire

$\rightsquigarrow$ i est solution

$\rightsquigarrow$ autre solution = $-i$

$\rightsquigarrow$ 2 solutions pour équation de degré 2

Définition de $\mathbb{C}$, forme algébrique

Définition :

$$\mathbb{C} = \{x + i\,y \;/\; x, y \in \mathbb{R}\}$$

Forme algébrique :

$$z = x + i\,y$$

Partie réelle

$\mathrm{Re}(z) = x$

Partie imaginaire

$\mathrm{Im}(z) = y$

Addition :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$$

Multiplication :

$i^2 = -1$

$$\begin{aligned}(a + ib)\,(c + id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i\,(ad + bc)\end{aligned}$$

Inverse :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib}\,\frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 - i^2b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\,\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Opérations spécifiques à $\mathbb{C}$

On se donne $z = x + iy$.

Conjugaison : $i \to -i$

$$\bar{z} = x - iy$$

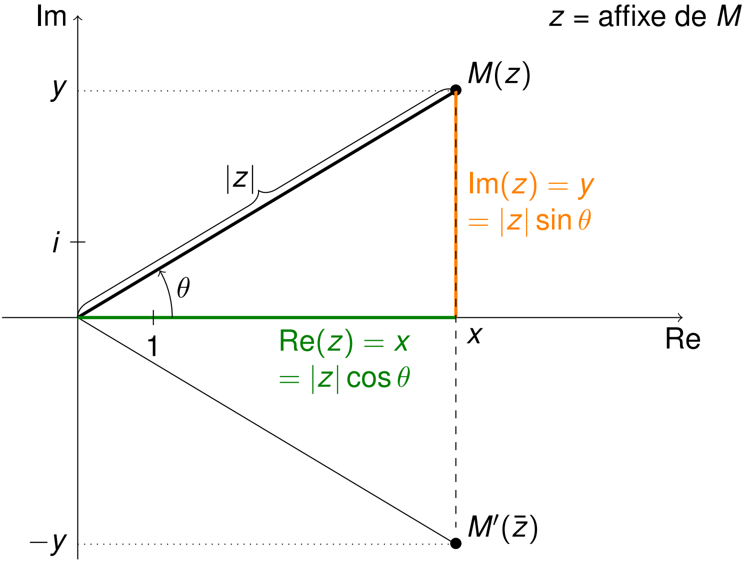
Module : étend la valeur absolue

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propriétés les plus remarquables :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \qquad |z|^2 = z\bar{z}$$

Interprétation géométrique



Forme exponentielle

Forme exponentielle :

$$z = |z|\, e^{i \arg(z)}$$

Conversion exponentielle $\to$ algébrique :

$$\rho e^{i\theta} = \rho \cos\theta + i \rho \sin\theta$$

Conversion algébrique $\to$ exponentielle :

1. calculer $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. calculer $\arg(z) = \begin{cases} \pi & \text{si } z \in \mathbb{R}^- \\ 2 \arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{sinon} \end{cases}$

Résolution de $z^n = c$

Propriétés

On a : $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$

$|z^n| = |z|^n \qquad \arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$

Preuve :

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\theta_1}\ |z_2| e^{i\theta_2} = \underbrace{|z_1||z_2|}_{|z_1 z_2|}\, e^{i\overbrace{(\theta_1 + \theta_2)}^{\theta}}$$

+ récurrence sur n

Résoudre $z^n = c$: $\qquad z = \rho\, e^{i\theta}$

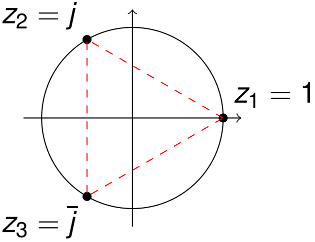
1. calculer $\rho = |c|^{1/n}$ — 1 sol.
2. résoudre $n\theta \equiv \arg(c)\ [2\pi]$ — n sols.

Exemple : $z^3 = 1$

1. $|z|^3 = |1| = 1 \quad \Rightarrow \quad |z| = 1$
2. $3\arg(z) \equiv \arg(1) \equiv 0 \ [2\pi] \quad \Rightarrow \quad \arg(z) \equiv 0 \ [\frac{2\pi}{3}]$

3 solutions :

- $z_1 = 1e^{i0} = 1$
- $z_2 = 1e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
- $z_3 = 1e^{4i\pi/3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$



Résolution de $az^2 + bz + c = 0$

Résolution algébrique $\rightsquigarrow$ mêmes formules que dans $\mathbb{R}$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad\qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

avec $\Delta = b^2 - 4\,ac$

Soucis ?

Résolution de $az^2 + bz + c = 0$

Résolution algébrique $\rightsquigarrow$ mêmes formules que dans $\mathbb{R}$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

avec $\Delta = b^2 - 4\,ac$

Soucis ? $\Delta \in \mathbb{C} \rightsquigarrow$ calcul de $\sqrt{\Delta}$?

méthode 1 résoudre $z^2 = \Delta$ cf $z^n = c$

méthode 2 poser $\sqrt{\Delta} = x + iy$ et résoudre $\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases}$

$\to$

Résolution de $az^2 + bz + c = 0$

Résolution algébrique $\rightsquigarrow$ mêmes formules que dans $\mathbb{R}$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad\qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

avec $\Delta = b^2 - 4\,ac$

Soucis ? $\Delta \in \mathbb{C} \rightsquigarrow$ calcul de $\sqrt{\Delta}$?

méthode 1 résoudre $z^2 = \Delta$ cf $z^n = c$

méthode 2 poser $\sqrt{\Delta} = x + iy$ et résoudre $\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases}$

$\to$ remplacer y par $\frac{\mathrm{Im}(\Delta)}{2x}$, puis poser $X = x^2$

Factorisation de polynômes

Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme P à coefficients complexes de degré $\deg(P) \geq 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire :

- si $\deg(P) = n$, il y a n solutions à $P(z) = 0$ avec multiplicité
- si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont les solutions, alors

$$P(z) = \alpha \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$

Factorisations dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Pour factoriser un polynôme $P(z)$ en pratique :

1. résoudre $P(z) = 0$
   - solutions évidentes
   - méthodes vues précédemment
2. écrire la factorisation dans $\mathbb{C}$ — cf. corollaire
3. si P à coef. réels, appliquer la transformation

$$(z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 - \underbrace{(z_1 + \bar{z}_1)}_{2\,Re(z_1) \in \mathbb{R}} z + \underbrace{z_1 \bar{z}_1}_{|z_1|^2 \in \mathbb{R}}$$

$\rightsquigarrow$ factorisation à coef. réels

Factorisation de polynômes – Exemple

Exemple : $P(z) = z^3 - 1$

1. $P(z) = 0 \;\Rightarrow z^3 = 1$

   $\rightsquigarrow$ 3 solutions : $z_1 = 1$ $\quad z_2 = j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ $\quad z_3 = \bar{j} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

2. factorisation dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - 1 = (z-1)\left(z - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

3. factorisation dans $\mathbb{R}$: $\quad 2\,\mathrm{Re}(j) = -1,\ |j|^2 = 1$

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$$

Liens entre $\mathbb{C}$ et trigonométrie

nombres complexes =

- 2 formes exploitables — algébrique + exponentielle
- forme exponentielle liée à la trigonométrie — Re $\leftrightarrow$ cos, Im $\leftrightarrow$ sin

Utilisation possible :

$$\begin{aligned}
e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i\,\sin(x+y) \\
e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + i\,\sin x)\,(\cos y + i\,\sin y) \\
&= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i\,(\cos x \sin y + \sin x \cos y)
\end{aligned}$$

Partie réelle ? $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Partie imaginaire ? $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$

Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$

Idée : passer de $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ à $\cos(nx)$ et/ou $\sin(nx)$

utile en intégration

Exemple :

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3\,e^{ix} + 3\,e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i}$$
$$= -\frac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

Opération inversion possible

cf TD

Argument et calcul d'angle

Propriété

Si A, B, C et D sont des points du plan d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D, avec $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$, alors l'angle entre les droites (AB) et (CD) vaut :

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right).$$