Analyse – Calcul d'intégrales

Christophe Mouilleron

école nationale supérieure d'informatique pour l'industrie et l'entreprise

Prérequis et objectifs

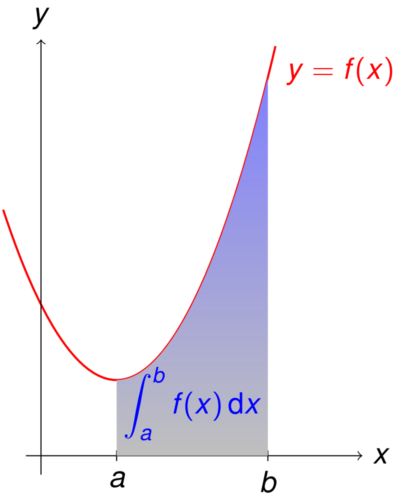
Prérequis :

- bases sur l'étude d'une fonction à variable réelle
- calcul de dérivées

Objectifs :

- définition de l'intégrale d'une fonction sur un segment
- calcul par primitive
- intégration par partie
- calcul par changement de variable

Intégration sur un segment



Donnée :

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

Résultat :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$

surface algébrique entre la courbe de f et l'axe des x

Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Additivité :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Multiplication par une constante :

$$\int_a^b \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Primitive d'une fonction

Primitive de f :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème

Si f est continue sur $[a, b]$ et si F est une primitive de f, alors

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Remarques :

- F dépend du choix pour a
- F et G primitives de f $\quad \Rightarrow \quad F - G = \text{cste}$

Calcul d'une intégrale par primitive

Théorème

Si F est une primitive (quelconque) de f, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\ F(x)\ ]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemples :

- $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Intégration par parties (IPP)

Rappel : $$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Donc : $$\int_a^b (u(x)v(x))' \, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x$$

Formule d'intégration par parties

Pour u et v dérivables, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[\, u(x)v(x) \, \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x$$

Intégration par parties : exemples

Polynôme $\times$ Trigo/exp

$\rightarrow$ poser $u =$ polynôme, $v' =$ trigo/exp

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, \mathrm{d}x = [x \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Fonction à dérivée simple $\times$ 1

$\rightarrow$ poser $u =$ fonction, $v' = 1$

$$\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 1 \, \mathrm{d}x$$

$$= 2 \ln 2 - 0 - [x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

Changement de variable

Rappel : $$\big(u(v(x))\big)' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Donc : $$u(v(b)) - u(v(a)) = \int_a^b \big(u(v(x))\big)' \,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(v(x))\, v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Or : $$u(v(b)) - u(v(a)) = \Big[u(x)\Big]_{v(a)}^{v(b)} = \int_{v(a)}^{v(b)} u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Formule de changement de variable

Pour u et v dérivables, on a :

$$\int_{v(a)}^{v(b)} u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(v(x))\, v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Changement de variable – Exemple 1

Calcul de $I_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$

Idée : remplacer x par $\sin t$

1. $t = \arcsin x$
2. $x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t \quad$ donc $\quad \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - (\sin t)^2}\,\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t) + 1}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Changement de variable – Exemple 2

Calcul de $I_r = r \displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\, \mathrm{d}x$

Idée : remplacer $\frac{x}{r}$ par y

1. $y = \frac{x}{r}$ et $x = ry$
2. $x = -r \Rightarrow y = -1$ $\qquad$ $x = r \Rightarrow y = 1$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = r$ donc $\mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}y$

$$\begin{aligned} I_r &= r \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, r\,\mathrm{d}y \\ &= r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}y = r^2\, I_1 = \frac{\pi r^2}{2} \end{aligned}$$

Intégrales de fractions trigo. – Règles de Bioche

On suppose ici que $f(t)$ est une fraction en $\cos t$, $\sin t$ et $\tan t$.

Règles :

1. si $f(-t) = -f(t)$, poser $x = \cos t$
2. si $f(\pi - t) = -f(t)$, poser $x = \sin t$
3. si $f(\pi + t) = f(t)$, poser $x = \tan t$
4. sinon poser $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. cas à éviter si possible

Exemple : $$I = \int_0^{\pi/2} \overbrace{\frac{\cos t}{1 + \sin t}}^{f(t)} \mathrm{d}t$$

$f(-t) \neq -f(t)$

$f(\pi - t) = -f(t) \rightsquigarrow I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x} = [\ln(1 + x)]_0^1 = \ln 2$

$x = \sin t$

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t$