Analyse – Développements limités

Christophe Mouilleron

école nationale supérieure d'informatique pour l'industrie et l'entreprise

Prérequis et objectifs

Prérequis :

- bases sur l'étude d'une fonction à variable réelle

Objectifs :

- cadre propre pour parler d'ordres de grandeurs
- approximation d'une fonction f par un polynôme
- maîtrise de l'erreur d'approximation
- application au calcul de limites
- application à l'étude du comportement asymptotique de f

Notations de Landau : $f = O(g)$

Définition

On dit que la fonction f est dominée par g au voisinage du point a lorsqu'il existe une constante C vérifiant

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

dès que x est suffisamment proche de a.

Notations : $f = \underset{x \to a}{O}(g)$ $\quad f = O(g)$ $\quad f \in O(g)$ $\quad g = \Omega(f)$

Exemples :

$$x = \underset{x \to +\infty}{O}(x^2) \qquad C = 1, x \geq 1$$

$$2x = \underset{x \to 0}{O}(x) \qquad C = 2$$

Notations de Landau : $f = o(g)$

Définition

On dit que la fonction f est négligeable devant g au voisinage du point a lorsque, pour toute constante $C \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

dès que x est suffisamment proche de a.

Notations : $f \underset{x \to a}{=} o(g)$ $\quad f = o(g)$ $\quad f \in o(g)$ $\quad g = \omega(f)$

Exemples :

$\frac{1}{x} = \underset{x \to +\infty}{o}(1)$ $\qquad x \geq \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{x} \leq C \cdot 1$

$x^2 = \underset{x \to 0^+}{o}(x)$ $\qquad 0 \leq x \leq C \Rightarrow x^2 \leq C\,x$

Notations de Landau : $f = \Theta(g)$

Définition

On dit que deux fonctions f et g sont du même ordre de grandeur lorsqu'il existe deux constantes A et B dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$A\,|f(x)| \leq |g(x)| \leq B\,|f(x)|$$

dès que x est suffisamment proche de a.

Notations : $f \underset{x \to a}{=} \Theta(g)$ $\quad f = \Theta(g)$ $\quad f \in \Theta(g)$ $\quad g = \Theta(f)$

Exemple :

$$2\,x^2 + x + 1 \underset{x \to +\infty}{=} \Theta(x^2) \qquad x \geq 1 \Rightarrow 2 \cdot x^2 \leq 2\,x^2 + x + 1 \leq 4 \cdot x^2$$

Notion d'équivalence

Définition

On dit que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage d'un point a lorsque

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Notation : $f \underset{x \to a}{\sim} g$ $\qquad$ $g \underset{x \to a}{\sim} f$

Exemples :

$$x^2 + x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$$

... mais $2x^2$ n'est pas équivalent à x^2 en $+\infty$.

Bilan

Pour comparer f et g, calculer $\ell = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$:

$\ell = 0$ On a f petit / g grand $\Rightarrow f = \underset{x \to a}{o}(g)$

$\ell = 1$ Définition de l'équivalence $\Rightarrow f \underset{x \to a}{\sim} g$

$\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ On a $f \approx \ell \cdot g \Rightarrow f = \underset{x \to a}{\Theta}(g)$

$\ell = \pm\infty$ On a f grand / g petit $\Rightarrow g = \underset{x \to a}{o}(f)$

ℓ non défini Pas de limite $\Rightarrow$ f et g non comparables $f = \cos$, $g = \sin$

Développements limités – Définition

Problème : approcher une fonction f par un polynôme

Développement limité de f à l'ordre n (en 0) :

$$f(x) = \text{ polynôme de degré } n + O(x^{n+1})$$

Applications :

- calcul approché de $f(x)$
- calcul de limites

Formules de Taylor – Idée de départ

On a $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$. Donc :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par partie : $u(t) = f'(t),\ v(t) = -(b-t)$

$$f(b) = f(a) + \Big[-(b-t)\,f'(t)\Big]_a^b + \int_a^b f''(t)\,(b-t)\,\mathrm{d}t$$

Donc $f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)\,(b-a)}_{\text{degré 1 en } b} + \underbrace{\int_a^b f''(t)\,(b-t)\,\mathrm{d}t}_{\text{reste intégral}}$

Formule de Taylor avec reste intégral

Taylor avec reste intégral

Si f est définie sur $[a, b]$, et dérivable autant de fois que l'on veut, alors on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)\,(b-t)^n}{n!} \mathrm{d}t$$

Preuve : récurrence + intégration par partie.

Intérêts :

- valable pour tout a et tout b
- valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (précision à choisir)
- vraie égalité

Formule de Taylor-Lagrange

Idée : borner le reste intégral $\qquad M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$

$$\left|\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)\,(b-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \frac{M\,(b-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$$

$$= M\left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b = \frac{M\,(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Taylor-Lagrange

Si f est définie sur $[a,b]$ et dérivable autant de fois que l'on veut, alors :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k\right| \leq \frac{M\,(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Formule de Taylor-Young

On prend a=0 et b=x.

Taylor-Young

Si f est définie autour de 0 et dérivable autant de fois que l'on veut, alors on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{n+1})$$

Intérêt :

- valable pour tout $n \in \mathbb{N}$
- donne les DLs usuels en 0

Calcul de DL via Taylor-Young

Exemple : $f(x) = \sin x$ à l'ordre $n = 5$.

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin(0) + \sin'(0)\,\frac{x}{1!} + \sin''(0)\,\frac{x^2}{2!} + \sin'''(0)\,\frac{x^3}{3!} \\
&\quad + \sin''''(0)\,\frac{x^4}{4!} + \sin'''''(0)\,\frac{x^5}{5!} + O(x^6) \\
&= \sin(0) + \cos(0)\,x - \sin(0)\,\frac{x^2}{2} - \cos(0)\,\frac{x^3}{6} \\
&\quad + \sin(0)\,\frac{x^4}{24} + \cos(0)\,\frac{x^5}{120} + O(x^6) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)
\end{aligned}$$

Règles de calcul sur les DLs (1)

Addition :

- additionner les DLs
- garder le $O(x^k)$ avec le k le plus petit
- supprimer les termes de degré $\geq k$

Exemple : $\cos(x) + \sin(x)$ à l'ordre 3

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$$

$$\cos(x) + \sin(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^4) + O(x^6)$$

Règles de calcul sur les DLs (2)

Multiplication :

- multiplier les DLs
- garder le $O(x^k)$ avec le k le plus petit
- supprimer les termes de degré $\geq k$

Exemple : $\cos(x)\sin(x)$ à l'ordre 2

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$
$$\sin x = x + O(x^3)$$

$$\cos(x)\sin(x) = x + O(x^3) - \frac{x^3}{2} + O(x^5) + O(x^4) + O(x^6)$$

Règles de calcul sur les DLs (3)

Composition : DL en 0 = DL valable pour tout Y qui tend vers 0

Exemple : $\dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 3

$$\frac{1}{1+Y} = 1 - Y + Y^2 - Y^3 + O(Y^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) = 1 + Y \qquad Y = -\frac{x^2}{2} + O(x^4) \to 0$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 - \left(-\tfrac{x^2}{2} + O(x^4)\right) + \left(-\tfrac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2 - \left(-\tfrac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^3 + O(x^8)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)\end{aligned}$$

Dernier exemple de DL

Exemple : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ à l'ordre 4

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$
$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$\begin{aligned}\tan x &= x + \frac{x^3}{2} + O(x^5) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + O(x^7) + O(x^5) + O(x^7) + O(x^9)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + O(x^5)\end{aligned}$$

Calcul de limite avec des DLs

Exemple : $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \exp(x)}{1 - \exp(2x)}$

On a :

- $\exp(x) = 1 + x + O(x^2)$
- $\exp(2x) = 1 + 2x + O(x^2)$ composition, $2x \to 0$

Donc :

$$\frac{1 - \exp(x)}{1 - \exp(2x)} = \frac{-x + O(x^2)}{-2x + O(x^2)} = \frac{-1 + O(x)}{-2 + O(x)} \to \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$