Analyse – Suites

Christophe Mouilleron

école nationale supérieure d'informatique pour l'industrie et l'entreprise

Prérequis et objectifs

Prérequis :

- étude de fonctions d'une variable réelle

Objectifs :

- étude de suites définies par récurrence
- méthode de Newton-Raphson

Vocabulaire

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $n \geq n_0$

- terme général : $u_n \in \mathbb{C}$
- fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$

Série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $n \geq n_0$

- terme général : $u_n \in \mathbb{C}$
- somme partielle : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \in \mathbb{C}$
- lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$:
  - on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge
  - somme de la série : $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Suites arithmétiques

Définition

Une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}^*$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \text{premier terme} \\ u_{n+1} & = u_n + r \end{cases}$$

Propriétés

- forme générale : $u_n = u_0 + r.n$ $\qquad u_{n+m} = u_n + r.m$
- somme partielle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\ \frac{u_0 + u_n}{2}$

nb. de termes

moyenne du premier et du dernier terme

Suites et séries géométriques

Définition

Une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \text{premier terme} \\ u_{n+1} & = q.u_n \end{cases}$$

Propriétés

- forme générale : $u_n = q^n.u_0$
  $u_{n+m} = q^m.u_n$
- somme partielle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ nb. de termes
- quand $|q| < 1$, somme de la série : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-q}$

Suites arithmético-géométrique (1)

Définition

Une suite arithmético-géométrique est définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \text{premier terme} \\ u_{n+1} & = q.u_n + r \end{cases}$$

où $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $r \in \mathbb{C}^*$

Limites possibles pour u_n ?

Suites arithmético-géométrique (1)

Définition

Une suite arithmético-géométrique est définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \text{premier terme} \\ u_{n+1} & = q.u_n + r \end{cases}$$

où $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $r \in \mathbb{C}^*$

Limite possible pour u_n ? $\quad \ell = q.\ell + r \quad \Rightarrow \quad \ell = \dfrac{r}{1-q}$

Formule close pour u_n ?

Suites arithmético-géométrique (1)

Définition

Une suite arithmético-géométrique est définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \text{premier terme} \\ u_{n+1} & = q.u_n + r \end{cases}$$

où $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $r \in \mathbb{C}^*$

Limite possible pour u_n ? $\ell = q.\ell + r \quad \Rightarrow \quad \ell = \dfrac{r}{1-q}$

Formule close pour u_n ?

- **Solution 1** utiliser une suite géométrique
- **Solution 2** utiliser une suite « arithmétique »

Suites arithmético-géométrique (2)

Solution 1

Poser $v_n = u_n - \ell \qquad u_n = v_n + \ell$

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= u_{k+1} - \ell \\ &= q.u_k + r - \ell \\ &= q(v_k + \ell) + r - \ell \\ &= q.v_k + (q-1)\ell + r \\ &= q.v_k \\ &\rightsquigarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ géométrique} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \ell \\ &= q^n.v_0 + \ell \\ &= q^n.(u_0 - \ell) + \ell \end{aligned}$$

Suites arithmético-géométrique (2)

Solution 1

Poser $v_n = u_n - \ell$ $\quad u_n = v_n + \ell$

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= u_{k+1} - \ell \\ &= q.u_k + r - \ell \\ &= q(v_k + \ell) + r - \ell \\ &= q.v_k + (q-1)\ell + r \\ &= q.v_k \\ &\rightsquigarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ géométrique} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \ell \\ &= q^n.v_0 + \ell \\ &= q^n.(u_0 - \ell) + \ell \end{aligned}$$

Solution 2

Poser $w_n = \frac{u_n}{q^n}$ $\quad u_n = q^n.w_n$

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= \frac{u_{k+1}}{q^{k+1}} = \frac{q.u_k + r}{q^{k+1}} \\ &= \frac{u_k}{q^k} + \frac{r}{q^{k+1}} \\ &= w_k + \frac{r}{q^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n &= q^n.w_n \\ &= q^n \left(w_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{r}{q^k} \right) \\ &= q^n.(u_0 - \ell) + \ell \end{aligned}$$

Suites définies par une récurrence linéaire

Récurrence d'ordre 2 **:** $u_{n+2} = a_1\, u_{n+1} + a_0\, u_n$

$\rightsquigarrow$ se ramener à une suite géométrique + calcul matriciel

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A\, U_n$$

Donc $U_n = A^n\, U_0$

Suites définies par une récurrence linéaire

Récurrence d'ordre 2 **:** $u_{n+2} = a_1\, u_{n+1} + a_0\, u_n$

$\rightsquigarrow$ se ramener à une suite géométrique + calcul matriciel

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A\, U_n$$

Donc $U_n = A^n\, U_0$

Récurrence d'ordre r **:** $u_{n+r} = \sum_{k=0}^{r-1} a_k\, u_{n+k}$

$\rightsquigarrow$ même chose avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+r-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{r-1} \end{pmatrix}$

Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Suite définie par récurrence, cas général : $u_{n+1} = f(u_n)$

Problème : Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction du choix pour u_0

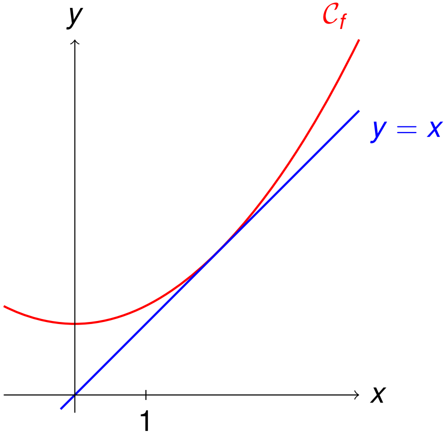
$\rightsquigarrow$ plage de valeurs, variations, limite ?

Étude en 3 **phases :**

1. tableau de variation de f + tracé de sa courbe
2. tableau de signe de $g(x) = f(x) - x$

   $\rightsquigarrow$ $g(\ell) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\ell) = \ell$ $\qquad$ ℓ = limite potentielle de u_n
3. étude de cas sur u_0 à partir du tableau de signe de g

Exemple : $u_{n+1} = u_n^2/4 + 1$

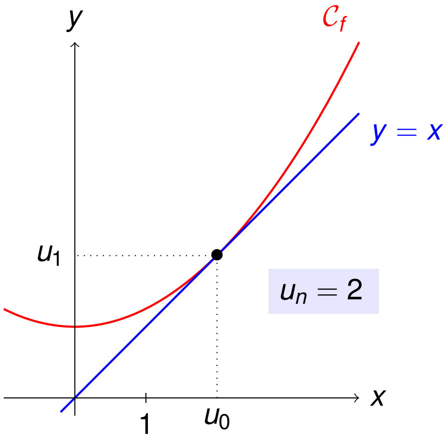
1. 

2. $g(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

3.

Exemple : $u_{n+1} = u_n^2/4 + 1$

1. 

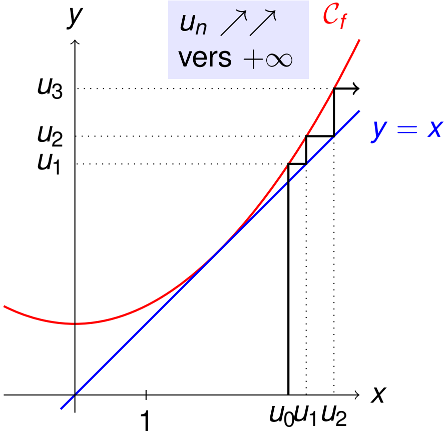
2. $g(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

3. $u_0 = 2$
   $u_1 = 2$ donc $u_n = 2$
   suite constante

Exemple : $u_{n+1} = u_n^2/4 + 1$

1.



2. $g(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

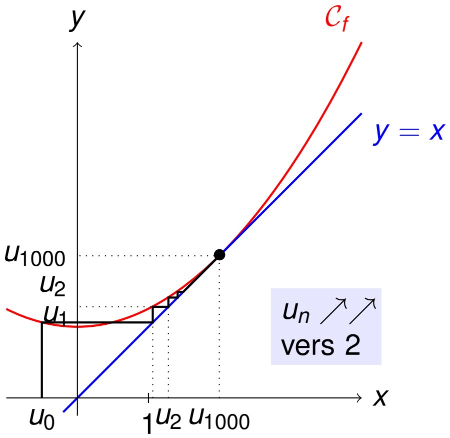
3. $u_0 = 2$

$u_1 = 2$ donc $u_n = 2$
suite constante

$u_0 > 2$

$u_1 > 2$ donc $u_n > 2$
$g(x) > 0$ sur $[2, +\infty[$
donc $u_n \nearrow\nearrow$ vers $+\infty$

1.



2. $g(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

3. $u_0 = 2$

$u_1 = 2$ donc $u_n = 2$
suite constante

$u_0 > 2$

$u_1 > 2$ donc $u_n > 2$
$g(x) > 0$ sur $[2, +\infty[$
donc $u_n \nearrow\nearrow$ vers $+\infty$

$u_0 < 2$

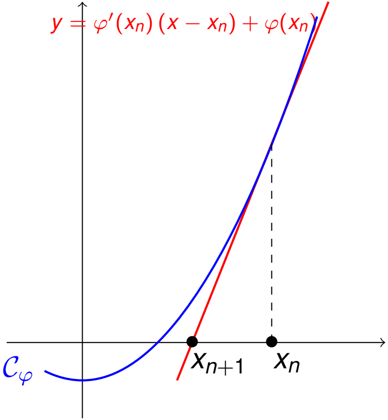
$u_1 > 1$ et :

- si $u_1 = 2$, cf cas 1
- si $u_1 > 2$, cf cas 2
- si $u_1 < 2$, cf dessin

Méthode de Newton-Raphson

Objectif

Étant donné une fonction φ, trouver numériquement une valeur x telle que $\varphi(x) = 0$.



Itération de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$$

Choix de x_0 ?

- poser $f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$
- étudier la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$