Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

TD 1 : Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 - Calculs de limites

Calculer les limites suivantes.

1.1 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x^2+x+1}$

1.2 $\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^2}{3x+2}$

1.3 $\lim_{x \to 0} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$

1.4 $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) + \cos(x)$

1.5 $\lim_{x \to 3^-} \frac{1-x^2}{x^2-7x+12}$

1.6 $\lim_{x \to 3} \frac{2-x}{x^2-6x+9}$

1.7 $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

1.8 $\lim_{x \to 0^+} x^x$

Exercice 2 - Calculs de dérivées

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de dérivation et calculer la dérivée.

2.1 $x \mapsto \cos(x)\exp(2x)$

2.2 $x \mapsto \exp(-x^2)$

2.3 $x \mapsto \ln(1+x^2)$

2.4 $x \mapsto x^x$

Exercice 3 - Études de fonctions

Pour chacune des fonctions suivantes, faire une étude complète et tracer la courbe représentative.

3.1 $x \mapsto (x-1)(x+2)^2$

3.2 $x \mapsto |x+3| + |1-x|$

3.3 $x \mapsto \frac{3x-1}{x-4}$

3.4 $x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$

3.5 $x \mapsto \exp(-x^2)$

Exercice 4 - Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

4.1 Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

4.2 Si $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum ou un maximum local en a.

4.3 Si une fonction f admet un minimum en a, alors on a forcément $f'(a) = 0$.

4.4 La fonction $\ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.5 On a $\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x^2+2x-3} = -\infty$.

Exercice 5 - Attention aux limites

On considère un carré dont le coté est de longueur 1. On note t_n le trajet qui consiste à aller du coin supérieur gauche au coin inférieur droit en répétant n fois :
— On se déplace d'abord de $1/n$ sur la droite ;
— puis, on se déplace de $1/n$ vers le bas.

5.1 Représenter graphiquement t_1, t_2, t_3 et t_8.

5.2 Quel est le trajet t que l'on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$?

5.3 On note $\ell(\mathcal{T})$ la longueur du trajet $\mathcal{T}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell(t_n)$.

5.4 Combien vaut $\ell(t)$? Commenter.

Exercice 6 - Optimisation sous contrainte **(examen 2022)**

Dans cet exercice, x et y sont deux entiers positifs vérifiant $x + y = 20$.
6.1 Trouvez les valeurs de x et y rendant $x^2\, y$ le plus grand possible. Expliquez votre démarche.
note : La contrainte d'égalité imposée dans cet exercice se réécrit $y = 20 - x$.

Exercice 7 - Inégalité de Young

Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

7.1 Montrer que $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$.
7.2 On suppose pour cette question que b est un réel positif fixé.
Tracer le tableau de variations de la fonction $f_b : x \mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - x\,b$.
7.3 En utilisant ce qui précède, montrer l'inégalité de Young :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \forall b \in \mathbb{R}^+,\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

7.4 Vérifier que la fonction ln est concave.
7.5 En déduire que, pour tout a et b réels strictement positifs, on a

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{\ln(a^p)}{p} + \frac{\ln(b^q)}{q} = \ln(ab).$$

7.6 Proposer une autre démonstration de l'inégalité de Young. Commenter.