Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

TD 2 : Calcul d'intégrales

Exercice 1 - Primitives

Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive.

1.1 $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

1.2 $f_2(x) = \tan x$

1.3 $f_3(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$

1.4 $f_4(x) = \sin^2 x \, \cos x$

1.5 $f_5(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

1.6 $f_6(x) = x \, \exp(-x^2)$

Exercice 2 - Intégration par parties

Calculer les valeurs des intégrales suivantes en utilisant la technique d'intégration par parties.

2.1 $\displaystyle\int_0^\pi 3x \, \sin(x) \, \mathrm{d}x$

2.2 $\displaystyle\int_1^e x \ln(x) \, \mathrm{d}x$

2.3 $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{1-x} \, \mathrm{d}x.$

2.4 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) \, \mathrm{d}x$

Exercice 3 - Changement de variable

3.1 En posant $y = \sqrt{x}$, calculer $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$.

3.2 En posant $y = x^3 + 1$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$.

3.3 En posant $y = \sqrt{1+x}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \, \mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}}$.

3.4 En posant $y = \exp(x)$ puis $y = 2\tan(t)$, calculer $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln(2\sqrt{3})} \frac{\mathrm{d}x}{\exp(x) + 4\exp(-x)}$.

3.5 En posant $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}$, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

Exercice 4 - Règles de Bioche

Utiliser les règles de Bioche afin de calculer les intégrales suivantes.

4.1 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, \cos x \, \mathrm{d}x$

4.2 $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^5 x \, \cos^3 x \, \mathrm{d}x$

4.3 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \, \mathrm{d}x$

4.4 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$

Exercice 5 - Fonction B **(examen 2020-2021)**

On considère la fonction $B(x,y) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2x-1}\,(\sin\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta$.

5.1 À l'aide de primitives, calculer $B(1,1)$ et $B(1,3)$.

5.2 En utilisant le changement de variable $t = (\sin\theta)^2$, montrer que

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\,t^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

5.3 En posant $u(x) = t^y$ et en utilisant la technique d'intégration par parties sur $B(x,y+1)$, montrer l'égalité $x\,B(x,y+1) = y\,B(x+1,y)$.

5.4 En déduire la valeur de $B(2,2)$.