 christophe.mouilleron@ensiie.fr

TD 3 : Nombres complexes

Exercice 1 - Forme algébrique et forme exponentielle

1.1 Écrire les complexes suivants sous forme algébrique.

(i) $e^{i\pi}$ (ii) $4\,e^{i\pi/3}$ (iii) $2\,e^{-i\pi/4}$

1.2 Calculer le module et l'argument, puis mettre sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants.

(i) -5 (ii) $-3i$ (iii) $1+i$ (iv) $\frac{\sqrt{3}}{3} - i$

Exercice 2 - Nombres complexes (exam. 2023)

On considère les nombres complexes suivants :

$$c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

2.1 Calculer $|c|$ et $\arg(c)$, puis donner la forme exponentielle de c.

2.2 Calculer z^2, et donner la relation liant z^2 à c.

2.3 En déduire la forme exponentielle de z.

2.4 Grâce à ce qui précède, trouver la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3 - Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

3.1 $z^4 = 8\sqrt{2}(1-i)$,

3.2 $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$.

3.3 $z^2 - (3i-7)\,z + 10 - 11i = 0$

3.4 $z^2 - (3-2i)z + 5 - i = 0$,

Exercice 4 - Linéarisation (exam. 2023)

4.1 Montrer que $(\cos x)^4 = \dfrac{\cos(4x) + 4\,\cos(2x) + 3}{8}$.

note : Commencer par utiliser $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et par développer le membre gauche.

4.2 En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (\cos x)^4 \,\mathrm{d}x$.

Exercice 5 - Intégration de fractions

Le but de cet exercice est de calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^4-1}$.

5.1 Trouver des complexes α, β, γ, δ tels que $f(x) = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x+1} + \dfrac{\gamma}{x-i} + \dfrac{\delta}{x+i}$.
note : On pourra par exemple réduire la partie de droite au même dénominateur et procéder à une identification des coefficients avec la partie de gauche.

5.2 Soit $g(x) = (x-1) \cdot f(x)$. Calculer $g(1)$ sachant que $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)}$.

5.3 Calculer maintenant $g(x)$ en remplaçant $f(x)$ par le membre de droite de l'égalité de la question 1. Que vaut alors $g(1)$?

5.4 Proposer une méthode efficace pour déterminer les nombres α, β, γ et δ de la question 1.

5.5 Trouver maintenant des réels a, b, c, et d tels que $\dfrac{x}{x^4-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$.

5.6 En déduire une primitive pour $f(x)$.

5.7 Appliquer la méthode vue précédemment pour trouver une primitive de $\dfrac{1}{x^3-x^2+x-1}$.