TD 3 : Nombres complexes

Exercice 1 - Forme algébrique et forme exponentielle

1.1 Écrire les complexes suivants sous forme algébrique.

(i) $e^{i\pi}$ (ii) $4\,e^{i\pi/3}$ (iii) $2\,e^{-i\pi/4}$

1.2 Calculer le module et l'argument, puis mettre sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants.

(i) -5 (ii) $-3i$ (iii) $1+i$ (iv) $\frac{\sqrt{3}}{3} - i$

Exercice 2 - Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

2.1 $z^4 = 8\sqrt{2}(1-i)$,

2.2 $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$.

2.3 $z^2 - (3i-7)\,z + 10 - 11i = 0$

2.4 $z^2 - (3-2i)z + 5 - i = 0$,

Exercice 3 - Intégration de fractions

Le but de cet exercice est de calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^4-1}$.

3.1 Trouver des complexes α, β, γ, δ tels que $f(x) = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x+1} + \dfrac{\gamma}{x-i} + \dfrac{\delta}{x+i}$.
note : On pourra par exemple réduire la partie de droite au même dénominateur et procéder à une identification des coefficients avec la partie de gauche.

3.2 Soit $g(x) = (x-1)\cdot f(x)$. Calculer $g(1)$ sachant que $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)}$.

3.3 Calculer maintenant $g(x)$ en remplaçant $f(x)$ par le membre de droite de l'égalité de la question 1. Que vaut alors $g(1)$?

3.4 Proposer une méthode efficace pour déterminer les nombres α, β, γ et δ de la question 1.

3.5 Trouver maintenant des réels a, b, c, et d tels que $\dfrac{x}{x^4-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$.

3.6 En déduire une primitive pour $f(x)$.

3.7 Appliquer la méthode vue précédemment pour trouver une primitive de $\dfrac{1}{x^3-x^2+x-1}$.

Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

Exercice 4 - Linéarisation **(exam. 2022)**

4.1 Montrer que $(\cos x)^3(\sin x)^2 = \dfrac{2\cos(x) - \cos(3x) - \cos(5x)}{16}$.

note : Commencer par utiliser $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, et par développer le membre gauche.

4.2 En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^3(\sin x)^2 \,\mathrm{d}x$.

4.3 Les règles de Bioche indiquent qu'on peut calculer I en effectuant le changement de variable $t = \sin(x)$. Retrouver la valeur de I en procédant de la sorte et commenter.
note : On rappelle que $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$.