

TD 1 : Ordres de grandeurs et développements limités

Exercice 1 - Ordres de grandeur

1.1 Classer les fonctions suivantes par ordre de grandeur croissant au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{array}{llll} a(x) = \frac{1}{x} & d(x) = 1 & g(x) = x \ln(x) & j(x) = x + \ln(x) \\ b(x) = \frac{1}{\ln x} & e(x) = \frac{\exp(x)}{2} & h(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) & k(x) = \frac{1}{x + \ln(x)} \\ c(x) = x^2 & f(x) = (x - 1)(x + 1) & i(x) = \exp(-x) & l(x) = \exp(2 - x) \end{array}$$

1.2 Indiquer parmi les fonctions ci-dessus lesquelles sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

1.3 Refaire les questions précédentes en considérant cette fois le voisinage de 0 avec $x > 0$.

Exercice 2 - Calculs de limites simples

Calculer les limites suivante. On factorisera par le terme dominant au niveau de chaque somme afin de lever les formes indéterminées.

2.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 1)(x + 3)}{x^2 + 1}$

2.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) + x \cos(x)$

2.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

2.4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{2x(1 + \sqrt{x})}$

2.5 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

Exercice 3 - DLs des fonctions usuelles

En utilisant votre formulaire d'analyse, donnez les développements limités à l'ordre 4 en $x = 0$ des fonctions suivantes.

3.1 $\exp(x)$

3.4 $\ln(1 + x)$

3.7 $(1 + x)^2$

3.2 $\cos(x)$

3.5 $\ln(1 - x)$

3.8 $\sqrt{1 + x}$

3.3 $\sin(x)$

3.6 $\frac{1}{1 - x}$

3.9 $\sqrt[3]{1 + x}$

Exercice 4 - Calculs de DLs

Calculer les développements limités des fonctions suivantes.

- 4.1 $f_1(x) = \sqrt{1+x^2}$ à l'ordre 4 en 0.
4.2 $f_2(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0.
4.3 $f_3(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)$ à l'ordre 3 en 0.
4.4 $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 5 en 0.
4.5 $f_5(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ à l'ordre 4 en 0.
4.6 $f_6(x) = \exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 5 - Calculs de limites

Calculer les limites suivantes.

- 5.1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$
5.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
5.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}$
5.4 $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(3x)}{1 - 2 \cos x}$
5.5 $\lim_{x \rightarrow 1/2} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$
5.6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \sqrt{1+2x+2x^2}}{x^2}$
5.7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$
5.8 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\tan x - x}$

Exercice 6 - Étude asymptotique grâce à un DL

En utilisant un développement limité, déterminer pour chacune des fonctions suivantes son asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

- 6.1 $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1+x}}$ 6.2 $f_2(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2+x+1}$ 6.3 $f_3(x) = x^2 \ln \frac{x+1}{x-1}$