Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

# TD 1 : Suites numériques

### Exercice 1 - Suites arithmétiques et géométriques

**1.1** Les 17 premiers termes d'une suite arithmétique vont de 3 à 99. Quelle en est la raison ?

**1.2** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique vérifiant $81\,u_9 = a^4\,u_5$ où $a \geq 0$.
Quelle est sa raison $q$ ? Quand converge-t-elle ?

**1.3** Si on sait en plus que $u_0 = 12$ et que la série de terme général $u_n$ converge vers 9, combien valent $a$ et $q$ ?

### Exercice 2 - Sommes partielles et série

**2.1** Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{n+1}{n+2}$.

**2.2** En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$.

### Exercice 3 - Calcul de complexité (examen 2023-2024)

L'additionneur de Brent et Kung est un circuit logique permettant de calculer efficacement la somme des deux entiers codés sur $n$ bits. Il repose sur un précalcul, permettant d'anticiper la présence de retenues, dont le nombre de portes logiques noté $C(n)$ est donné par :

$$\begin{cases} C(1) = 2 \\ C(n) = 2\,C\left(\frac{n}{2}\right) + 3 \quad \text{pour } n > 1. \end{cases}$$

**3.1** Calculer les valeurs de $C(2)$, $C(4)$, $C(8)$ et $C(16)$.

**3.2** On pose $u_\ell = \dfrac{C(2^\ell)}{2^\ell}$. Vérifier que $u_\ell - u_{\ell-1} = \dfrac{3}{2^\ell}$.

**3.3** En déduire que $u_\ell - u_0 = 3\left(1 - \dfrac{1}{2^\ell}\right)$.

**3.4** Déterminer la valeur de $u_0$, puis de $u_\ell$ et $C(2^\ell)$ en fonction de $\ell$, et enfin de $C(n)$ en fonction de $n$. Comparer avec le résultat obtenu à la question 1.

### Exercice 4 - Étude de suites définies par récurrence

**4.1** Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3\,u_n - 2}$ en fonction de $u_0$. Faire un dessin pour chaque cas.

**4.2** Même question pour la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n^3$.

**4.3** Même question pour la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 4\,u_n + 6$.

Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

**Exercice 5 - Méthode de Newton-Raphson** **(examen 2023-2024)**

On souhaite utiliser la méthode de Newton avec la fonction $\varphi(x) = x^2 - a$. où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

**5.1** Quelle(s) valeur(s) va-t-on obtenir grâce à la méthode de Newton ?

**5.2** Montrer que l'itération de Newton associée à $\varphi$ est $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + a}{2\, u_n}$.

**5.3** Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + a}{2x}$ et tracer sa courbe dans le cas $a = 4$.

**5.4** Montrer que, pour tout $u_0 > 0$, la suite $u_n$ tend bien vers une des valeurs annoncées à la question 1.

**note :** On utilisera la courbe de la question précédente pour illustrer les différents cas (selon la valeur de $u_0$).

**5.5** Vers quelle valeur tend la suite $u_n$ si on part de $u_0 < 0$ ?