TD 2 : Suites numériques

Exercice 1 - Suites arithmétiques et géométriques

1.1 Les 17 premiers termes d'une suite arithmétique vont de 3 à 99. Quelle en est la raison ?

1.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique vérifiant $81\,u_9 = a^4\,u_5$ où $a \geq 0$. Quelle est sa raison q ? Quand converge-t-elle ?

1.3 Si on sait en plus que $u_0 = 12$ et que la série de terme général u_n converge vers 9, combien valent a et q ?

Exercice 2 - Sommes partielles et série

2.1 Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{n+1}{n+2}$.

2.2 En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$.

Exercice 3 - Coût d'un algorithme de type diviser pour régner

En algorithmique, les approches de type *diviser pour régner* mènent généralement à un coût $t(n)$ qui vérifie $t(n) = a \cdot t(n/b) + k \cdot n^c$, où a, b, c et k sont des entiers.

L'objectif de cet exercice est de voir comment calculer $t(n)$ en fonction de n et k uniquement, et d'appliquer cela sur plusieurs exemples.

3.1 On pose $u_n = t(b^n)$. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, n, a, b, c et k.

3.2 On pose maintenant $v_n = \dfrac{u_n}{a^n}$. Montrer que $v_n - v_{n-1} = k\left(\dfrac{b^c}{a}\right)^n$.

3.3 En déduire successivement les valeurs de v_n, u_n et enfin $t(n)$ en fonction de k et n lorsque $b = a = 2$, $c = 1$ et $t(1) = 0$.

note : Pour $t(n)$, on commercera par trouver une formule pour $t(2^\ell)$ et on considérera qu'elle est représentative du cas général. On remplacera alors ℓ par $\log_2(n)$ pour obtenir $t(n)$.

3.4 Même question pour $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$ et $t(1) = 1$.

3.5 Même question pour $a = c = 1$, $b = 2$ et $t(1) = 0$.

3.6 Même question pour $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ et $t(1) = 1$.

Exercice 4 - Étude de suites définies par récurrence

4.1 Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3\,u_n - 2}$ en fonction de u_0. Faire un dessin pour chaque cas.

4.2 Même question pour la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n^3$.

4.3 Même question pour la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 4\,u_n + 6$.

Exercice 5 - Méthode de Newton dans Quake III

Dans le code de Quake III, la valeur de $\frac{1}{\sqrt{a}}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est calculée à l'aide de la méthode de Newton-Raphson appliquée avec $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - a$.

5.1 Montrer que l'itération à calculer est alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n(3 - a\,u_n^2)}{2}$.

5.2 Faire un dessin montrant l'évolution des premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $a = 1$ et $u_0 = 1.5$.

note : On commencera par étudier $f_1 : x \mapsto \dfrac{3x - x^3}{2}$ et par tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_{f_1}$.

5.3 Dans le cas général, dresser le tableau de variations de la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{3x - a\,x^3}{2}$.

5.4 Dresser le tableau de signe de la fonction $g_a : x \mapsto f_a(x) - x$.

note : On commencera par résoudre l'équation $g_a(x) = 0$.

5.5 Étudier le comportement de la suite définie par $u_{n+1} = f_a(u_n)$ en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$.

note : Concentrez-vous en priorité sur les cas faciles, en détaillant bien votre raisonnement.

5.6 L'objectif étant de converger vers $\frac{1}{\sqrt{a}}$, dans quel intervalle doit on choisir u_0 ?