Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

TD 2 : Ordres de grandeurs et développements limités

Exercice 1 - Ordres de grandeur

1.1 Classer les fonctions suivantes par ordre de grandeur croissant au voisinage de $+\infty$:

$a(x) = \dfrac{1}{x}$	$d(x) = 1$	$g(x) = x\ln(x)$	$j(x) = x + \ln(x)$
$b(x) = \dfrac{1}{\ln x}$	$e(x) = \dfrac{\exp(x)}{2}$	$h(x) = \exp(\dfrac{x}{2})$	$k(x) = \dfrac{1}{x+\ln(x)}$
$c(x) = x^2$	$f(x) = (x-1)(x+1)$	$i(x) = \exp(-x)$	$l(x) = \exp(2-x)$

1.2 Indiquer parmi les fonctions ci-dessus lesquelles sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

1.3 Refaire les questions précédentes en considérant cette fois le voisinage de 0 avec $x > 0$.

Exercice 2 - DLs des fonctions usuelles

En utilisant votre formulaire d'analyse, donnez les développements limités à l'ordre 4 en $x = 0$ des fonctions suivantes.

2.1 $\exp(x)$

2.2 $\cos(x)$

2.3 $\sin(x)$

2.4 $\ln(1+x)$

2.5 $\ln(1-x)$

2.6 $\dfrac{1}{1-x}$

2.7 $(1+x)^2$

2.8 $\sqrt{1+x}$

2.9 $\sqrt[3]{1+x}$

Exercice 3 - Calculs de DLs

Calculer les développements limités des fonctions suivantes.

3.1 $f_1(x) = \sqrt{1+x^2}$ à l'ordre 4 en 0.

3.2 $f_2(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0.

3.3 $f_3(x) = \ln\left(x + \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)$ à l'ordre 3 en 0.

3.4 $f_4(x) = \ln(1+x)$ à l'ordre 4 en $x = 1$.

3.5 $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ à l'ordre 3 en 0.

3.6 $f_6(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 5 en 0.

3.7 $f_7(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ à l'ordre 4 en 0.

3.8 $f_8(x) = \sqrt{1+\sin x} - 1$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 4 - Calculs de limites simples

Calculer les limites suivante. On factorisera par le terme dominant au niveau de chaque somme afin de lever les formes indéterminées.

4.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-1)(x+3)}{x^2+1}$

4.2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

4.3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+1}}{2x(1+\sqrt{x})}$

4.4 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

Exercice 5 - Calculs de limites

Calculer les limites suivantes.

5.1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

5.2 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\exp(x)-\cos(x)}{3x}$

5.3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-2\cos x - x\sin x}{x^4}$

5.4 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

5.5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

5.6 $\lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{\sin(3x)}{1-2\cos x}$

5.7 $\lim\limits_{x\to 1/2} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$

5.8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ pour $a>1$, $b>1$

5.9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

5.10 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2^{1/x}-1\right)$

Exercice 6 - DL de $\arcsin x$

6.1 Faites l'étude de la fonction sin sur $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$, et tracez sa courbe représentative.

6.2 Vérifiez que $\sin : [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}] \to [-1,\ 1]$ est une bijection.

6.3 La fonction $\arcsin : [-1,\ 1] \to [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ est la bijection réciproque de sin.

Tracez la courbe représentative de arcsin, sachant que cette courbe peut être obtenue par symétrie de la courbe de sin par rapport à la droite $y=x$.

6.4 On souhaite trouver le développement limité de $\arcsin x$ à l'ordre 5 en $x=0$.

Expliquez pourquoi on a $\arcsin x = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + O(x^6)$ avec a, b et c réels.

6.5 Calculez de deux manières différentes le développement limité de $f(x) = \arcsin(\sin x)$ à l'ordre 5 en $x=0$, et déduisez-en les valeurs des réels a, b et c.

Exercice 7 - Étude asympotique grâce à un DL

En utilisant un développement limité, déterminer pour chacune des fonctions suivantes son asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

7.1 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1+x}}$

7.2 $f_2(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{x^2+x+1}$

7.3 $f_3(x) = x^2 \ln \dfrac{x+1}{x-1}$