

## TD : Révisions S1

### Exercice 1 - Attention aux limites

On considère un carré dont le côté est de longueur 1. On note  $t_n$  le trajet qui consiste à aller du coin supérieur gauche au coin inférieur droit en répétant  $n$  fois :

- On se déplace d'abord de  $1/n$  sur la droite ;
- puis, on se déplace de  $1/n$  vers le bas.

- 1.1 Représenter graphiquement  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $t_8$ .
- 1.2 Quel est le trajet  $t$  que l'on obtient en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  ?
- 1.3 On note  $\ell(\mathcal{T})$  la longueur du trajet  $\mathcal{T}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(t_n)$ .
- 1.4 Combien vaut  $\ell(t)$  ? Commenter.

### Exercice 2 - Propriétés des fonctions cubiques

On considère dans cet exercice une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme  $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$  avec  $a \neq 0$ .

- 2.1 Montrer que la courbe de  $f$  admet un unique point d'inflexion  $(x_0, y_0)$  que l'on déterminera.
- 2.2 Vérifier que la courbe de  $f$  admet une symétrie centrale par rapport au point  $(x_0, y_0)$ .

### Exercice 3 - Linéarisation ou Bioche

Calculer chacune des intégrales suivantes en utilisant la technique de linéarisation ou les règles de Bioche (selon ce qui convient le mieux).

$$3.1 \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \, dx$$

$$3.2 \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx$$

$$3.3 \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x \, dx$$

$$3.4 \int_0^{\pi/3} \sin^5 x \cos^3 x \, dx$$

**Exercice 4 - Calcul de  $\sin(\pi/5)$**

- 4.1** En utilisant le fait que  $\sin(5x) = \operatorname{Im}((e^{ix})^5)$  et que  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , et en développant  $(\cos x + i \sin x)^5$ , exprimer  $\sin(5t)$  en fonction de  $\sin(t)$ ,  $\sin^3(t)$  et  $\sin^5(t)$ .
- 4.2** En fixant  $x = \frac{\pi}{5}$ , déduire que  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$  est une solution de l'équation  $16z^5 - 20z^3 + 5z = 0$ .
- 4.3** Expliquer pourquoi  $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$  est solution de l'équation  $16Z^2 - 20Z + 5 = 0$ .
- 4.4** Montrer que  $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{1}{2}$ .
- 4.5** Résoudre l'équation  $16Z^2 - 20Z + 5 = 0$ .
- 4.6** En déduire la valeur de  $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ , puis de  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .
- 4.7** En utilisant à nouveau la formule  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , trouver la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

**Exercice 5 - Cercles ou droites ?**

- 5.1** Décrire l'ensemble des points dont l'affixe  $z$  vérifie  $z - \bar{z} = 2i$ .
- 5.2** Décrire l'ensemble des points dont l'affixe  $z$  vérifie  $\bar{z} = \frac{1}{z}$ .
- 5.3** Décrire l'ensemble des points dont l'affixe  $z$  vérifie  $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$ .
- 5.4** Même question pour  $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$ .
- 5.5** Décrire l'ensemble des points dont l'affixe  $z$  vérifie  $\arg(2z + i) = \frac{\pi}{3} \bmod \pi$ .
- 5.6** Soit  $f(z) = \frac{z-3}{z-1}$ . Décrire l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $|f(z)| = 1$ .
- 5.7** Même question pour  $|f(z)| = 3$ .
- 5.8** Même question pour  $\arg(f(z)) = 0 \bmod \pi$ .
- 5.9** Même question pour  $\arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$ .