Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

TD 3 : Unité arithmétique et logique

Exercice 1 - Une histoire de drapeaux

Dans cet exercice, on considère que les entiers sont codés sur 8 bits avec complément à deux.

Pour chacune des opérations suivantes, donner :
— le résultat de l'opération en binaire et en décimal,
— la valeur des drapeaux S(ign), Z(ero), C(arry) et O(verflow).

1.1 `100 + 52`

1.2 `52 + (-56)`

1.3 `(-56) + (-100)`

1.4 `(-128) + (-128)`

Exercice 2 - Additionneur *carry-select* (exam. 2021)

Le but de cet exercice est de concevoir un additionneur binaire sur n bits efficace.
Soit k un diviseur de n. On va réaliser l'addition de la manière suivante :

1. découper les entrées en $\frac{n}{k}$ paquets de k bits ;
2. pour chaque poids (sauf le plus faible), faire en parallèle deux additions (séquentielles) sur k bits, la première avec une retenue de 0 et la deuxième avec une retenue de 1 ;
3. pour chaque poids, choisir le résultat final en fonction de la retenue issue de poids précédent.

Dans la suite, on appellera *additionneur carry-select* le circuit ainsi obtenu.

2.1 Dessiner l'*additionneur carry-select* quand $n = 6$ et $k = 2$.

2.2 Rappeler la profondeur et le nombre de portes logiques pour faire un additionneur séquentiel sur k bits.

2.3 Rappeler la profondeur et le nombre de portes logiques pour faire un multiplexeur $2N \to N$.

2.4 Calculer le nombre de portes de l'*additionneur carry-select* en fonction de n et de k.
Vérifier que le résultat est bien linéaire par rapport à n.

2.5 Calculer la profondeur de l'*additionneur carry-select* en fonction de n et de k.

2.6 Trouver la valeur de k qui minimise cette profondeur (à n fixé).
Quelle profondeur obtient-on alors ?

Exercice 3 - Nombre de *trailing zeros* (exam. 2022)

On considère un nombre binaire $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, 2^i = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0}^{(2)}$, composé de $n > 1$ bits.

L'objectif de cet exercice est de concevoir un circuit efficace pour calculer le nombre de *trailing zeros* de A, c'est-à-dire le nombre de 0 suivants le dernier 1 dans l'écriture binaire de A. Ce nombre sera noté $\mathrm{ntz}(A)$ dans la suite. Lorsqu'il n'y a pas de 1 dans l'écriture binaire de A (donc quand $A = 0$), on convient que $\mathrm{ntz}(A) = n$. Ainsi, pour $n = 8$, on a par exemple :

$$\mathrm{ntz}(16) = \mathrm{ntz}\left(\overline{0001\,0000}^{(2)}\right) = 4$$
$$\mathrm{ntz}(42) = \mathrm{ntz}\left(\overline{0010101\,0}^{(2)}\right) = 1$$
$$\mathrm{ntz}(0) = \mathrm{ntz}\left(\overline{00000000}^{(2)}\right) = 8.$$

Afin de calculer ntz(A), nous aurons besoin de la notion de poids de Hamming. Si $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\, 2^i$, son poids de Hamming $w(B)$ est égal au nombre de bits b_i égaux à 1. Ainsi :

$$w(16) = w\big(\overline{000\,1\,0000}^{(2)}\big) = 1$$
$$w(42) = w\big(\overline{00\,1\,0\,1\,0\,1\,0}^{(2)}\big) = 3$$
$$w(0) = w\big(\overline{00000000}^{(2)}\big) = 0.$$

3.1 Donner un circuit $\boxed{W_2}$ à 2 entrées et 2 sorties, calculant le poids de Hamming pour $n = 2$.

3.2 Donner un circuit $\boxed{W_3}$ à 3 entrées et 2 sorties, calculant le poids de Hamming dans le cas $n = 3$. Que remarquez-vous ?

3.3 On suppose maintenant que $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Le circuit $\boxed{W_n}$, calculant le poids de Hamming d'un nombre codé sur n bits, possède alors n entrées et $k+1$ sorties.
Expliquer comment construire $\boxed{W_n}$ récursivement, à l'aide de circuits $\boxed{W_{n/2}}$ et d'additionneurs.

3.4 [$\star$] Calculer le nombre de portes logiques et la profondeur du circuit $\boxed{W_n}$ ainsi obtenu.
note : Pour simplifier les calculs, on utilisera des additionneurs naïfs. On rappelle qu'un tel additionneur sur N bits possède $5N$ portes logiques pour une profondeur de $3N$.

3.5 On souhaite maintenant faire un circuit $\boxed{C_n}$ calculant le nombre de *trailing zeros* dans l'écriture binaire sur n bits d'un nombre A. Pour cela, on procède de la façon suivante :

(i) Pour $i \in [\![\, 0,\, n-1 \,]\!]$, on calcule le bit de contrôle z_i, qui vaudra 1 si et seulement si les $i+1$ derniers bits de A sont nuls (donc si $a_j = 0$ pour tout $j \in [\![\, 0,\, i \,]\!]$).

(ii) On calcule le poids de Hamming de $Z = \sum_{i=0}^{n-1} z_i\, 2^i$.

Pourquoi a-t-on bien l'égalité ntz$(A) = w(Z)$?

3.6 Expliquer comment calculer z_i à partir de a_i et de z_{i-1}.

3.7 Dessiner le circuit $\boxed{C_4}$, puis estimer la profondeur de $\boxed{C_n}$.

3.8 Montrer que, en complément à 2, on a la relation ntz$(A) = w\Big(\overline{A} \otimes (A-1)\Big)$, où :

— $\overline{A}$ est le complément à 1 de A,
— $\otimes$ est l'opération logique *and* bit à bit.

3.9 Proposer un nouveau circuit $\boxed{C'_n}$ pour calculer ntz(A), reposant sur cette relation.

3.10 Estimer la profondeur de $\boxed{C'_n}$, comparer avec celle de $\boxed{C_n}$, et commenter.