LASF – Critères de reconnaissabilité

Christophe Mouilleron

Introduction

On sait reconnaître à l'aide d'un automate fini :

- le langage vide $\emptyset$,
- le langage $\{\varepsilon\}$,
- les langages finis.

De plus, si L_1 et L_2 sont reconnaissables, alors il en est de même de :

- $\text{Pré}(L_1)$, $\text{Suf}(L_1)$, $\text{Fact}(L_1)$, $u^{-1}L_1$ et L_1u^{-1},
- L_1^t et $A^* \setminus L_1$,
- $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \setminus L_2$, $L_1 \cdot L_2$ et L_1^*.

Rappels – Introduction

On a vu (cours sur l'émondage d'automates) :

- langage infini reconnu par $\mathcal{A} \Rightarrow$ boucle dans $\mathcal{A}$
- un algorithme pour détecter les boucles dans un automate

Rappels – Introduction

On a vu (cours sur l'émondage d'automates) :

- langage infini reconnu par $\mathcal{A} \Rightarrow$ boucle dans $\mathcal{A}$
- un algorithme pour détecter les boucles dans un automate

Aujourd'hui, on va :

- approfondir l'argument sur les boucles
- voir un critère pour montrer la non-reconnaissabilité d'un langage
- prouver la non reconnaissabilité de certains langages classiques
- voir d'autres méthodes pour montrer la non-reconnaissabilité

Plan

1. Lemme de l'étoile
   - Exemple introductif
   - Lemme de l'étoile

2. Autres critères de non reconnaissabilité
   - Via les résidus
   - Via des opérations sur les langages

Plan

1. Lemme de l'étoile
   - Exemple introductif
   - Lemme de l'étoile

2. Autres critères de non reconnaissabilité
   - Via les résidus
   - Via des opérations sur les langages

Exemple important

On veut montrer que $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

Intuition : Il faudrait une mémoire (arbitrairement grande) pour stocker le nombre n de a lus.

Schéma de preuve :

- raisonnement par l'absurde

Exemple important

On veut montrer que $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

Intuition : Il faudrait une mémoire (arbitrairement grande) pour stocker le nombre n de a lus.

Schéma de preuve :

- raisonnement par l'absurde
- on se donne $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L$ $\qquad$ $\mathcal{A}$ a N états

Exemple important

On veut montrer que $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

Intuition : Il faudrait une mémoire (arbitrairement grande) pour stocker le nombre n de a lus.

Schéma de preuve :

- raisonnement par l'absurde
- on se donne $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L$ — $\mathcal{A}$ a N états
- on se donne un mot de L de longueur $> N$ — $a^N b^N$ convient

Exemple important

On veut montrer que $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

Intuition : Il faudrait une mémoire (arbitrairement grande) pour stocker le nombre n de a lus.

Schéma de preuve :

- raisonnement par l'absurde
- on se donne $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L$ — $\mathcal{A}$ a N états
- on se donne un mot de L de longueur $> N$ — $a^N b^N$ convient
- on utilise une boucle dans $\mathcal{A}$ pour arriver à une contradiction

Preuve en détail

1. On suppose que $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, E)$ reconnaît L.
2. On considère le mot $u = a^N b^N$ où $N = |Q|$. Comme $u \in L$, on a dans $\mathcal{A}$ un chemin

$$q_0 \in I \xrightarrow[a]{u_1} q_1 \xrightarrow[a]{u_2} \cdots \xrightarrow[a]{u_N} q_N \xrightarrow[b]{u_{N+1}} q_{N+1} \xrightarrow[b]{u_{N+2}} \cdots \xrightarrow[b]{u_{2N}} q_{2N} \in F.$$

3. Comme $2N > N$, il existe $i < j$ tels que $q_i = q_j$. On a donc une boucle dans $\mathcal{A}$. Il y alors 3 cas possibles :
   - soit $i < j \leq N$, boucle sur des a
   - soit $N \leq i < j$, boucle sur des b
   - soit $i < N < j$. boucle sur des a puis des b

Preuve en détail – suite

4. **Étude des cas.** Comme $q_i = q_j$, on a dans A le chemin

$$q_0 \in I \xrightarrow{u_1} \cdots \xrightarrow{u_i} q_i = q_i \xrightarrow{u_{i+1}} q_{i+1} \xrightarrow{u_{i+2}} \cdots$$
$$\xrightarrow{u_j} q_j \xrightarrow{u_{j+1}} q_{j+1} \xrightarrow{u_{j+2}} \cdots \xrightarrow{u_{2N}} q_{2N} \in F.$$

Passage dans la boucle 2 fois

- si $i < j \leq N$, alors $a^{N+(j-i)}b^N \in L(\mathcal{A}) = L$ FAUX
- si $i < j \leq N$, alors $a^N b^{N+(j-i)} \in L(\mathcal{A}) = L$ FAUX
- si $i \leq N < j$, alors $a^N b^{j-N} a^{N-i} b^N \in L(\mathcal{A}) = L$ FAUX

5. Conclusion : contradiction dans tous les cas
$\rightsquigarrow L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **n'est pas reconnaissable.**

Plan

Lemme de l'étoile (ou lemme de pompage)

Lemme de l'étoile

Si $L \in \mathrm{Rec}(A^*)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in L$ de longueur $\geq N$, on puisse trouver une factorisation $x = uvw$ vérifiant :

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $uv^nw \in L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme de l'étoile (ou lemme de pompage)

Lemme de l'étoile

Si $L \in \mathrm{Rec}(A^*)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in L$ de longueur $\geq N$, on puisse trouver une factorisation $x = uvw$ vérifiant :

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $uv^n w \in L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

- on se donne $\mathcal{A}$ reconnaissant L et on note $N =$ nb d'états de $\mathcal{A}$,
- si $x \in L$, on a dans A un chemin $q_0 \in I \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_k} q_k \in F$.
- comme $k = |x| \geq N$, il existe $i < j$ tels que $q_i = q_j$, et on découpe le chemin en trois parties :

$$q_0 \xrightarrow{u} q_i \xrightarrow{v} q_j = q_i \xrightarrow{w} q_k.$$

- si on boucle $n \in \mathbb{N}$ fois en q_i, on reconnaît bien $uv^n w$.

Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\neg \left\{ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \neg \left\{ \forall x \in L,\ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ \neg \left\{ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$
$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ |x| > N \text{ et } \neg \left\{ \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right\}$$
$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w, \quad \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ |x| > N \text{ et } \forall u, v, w,\ \neg \left\{ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ |x| > N \text{ et } \forall u, v, w,\ \left\{ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et } v \neq \varepsilon \\ \Rightarrow \neg(\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left(|x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ |x| > N \text{ et } \forall u, v, w,\ \left\{ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et } v \neq \varepsilon \\ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ uv^n w \notin L \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

Premier critère de non reconnaissabilité

Pour montrer que $L \subset A^*$ n'est pas reconnaissable, on peut utiliser :

Corollaire

Si pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un mot $x \in L$ de longueur $\geq N$ telle que pour toute décomposition $x = uvw$ avec $v \neq \varepsilon$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ qui vérifie $uv^n w \notin L$, alors L n'est pas reconnaissable par un AF.

Premier critère de non reconnaissabilité

Pour montrer que $L \subset A^*$ n'est pas reconnaissable, on peut utiliser :

Corollaire

Si pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un mot $x \in L$ de longueur $\geq N$ telle que pour toute décomposition $x = uvw$ avec $v \neq \varepsilon$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ qui vérifie $uv^n w \notin L$, alors L n'est pas reconnaissable par un AF.

Exemple : encore $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

- Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on choisit $x = a^N b^N$.
- Si $x = uvw$, on a 3 cas possibles.
- Dans chaque cas, $uv^2 w \notin L$ (donc $n = 2$ convient à chaque fois).

$\rightsquigarrow \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **n'est pas reconnaissable.**

Autre exemple

On considère $L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$.

Autre exemple

On considère $L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on choisit $x = a^N b a^N \in L$.

En décomposant $x = uvw$, on a 3 cas possibles :

Autre exemple

On considère $L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on choisit $x = a^N b a^N \in L$.

En décomposant $x = uvw$, on a 3 cas possibles :

1. $u = a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{N-i-j} b a^N$. $uw \notin L$ (pas assez de a à gauche)
2. $u = a^N b a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{N-i-j}$. $uw \notin L$ (pas assez de a à droite)

Autre exemple

On considère $L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on choisit $x = a^N b a^N \in L$.

En décomposant $x = uvw$, on a 3 cas possibles :

1. $u = a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{N-i-j} b a^N$. $uw \notin L$ (pas assez de a à gauche)
2. $u = a^N b a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{N-i-j}$. $uw \notin L$ (pas assez de a à droite)
3. $u = a^{N-i}$, $v = a^i b a^j$ et $w = a^{N-j}$. $uv^{12}w \notin L$ (trop de b)

$\rightsquigarrow L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$ **n'est pas reconnaissable.**

Remarque sur le lemme de l'étoile

ATTENTION :

Si on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que le langage L vérifie les hypothèses du lemme de l'étoile, on ne peut rien conclure.

Remarque sur le lemme de l'étoile

ATTENTION :

Si on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que le langage L vérifie les hypothèses du lemme de l'étoile, on ne peut rien conclure.

Pour la culture, il existe des variantes :

- lemme de l'étoile faible = limite le nombre de cas pour v
- lemme de l'étoile fort = beaucoup plus complexe, mais permet de conclure à coup sûr

Plan

Critère basé sur le nombre de résidus

On a vu au cours sur la minimisation que :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Leftrightarrow L \text{ a un nombre fini de résidus } u^{-1}L.$$

Corollaire

Pour montrer qu'un langage L n'est pas reconnaissable, on peut montrer qu'il a un nombre infini de résidus différents.

Exemple : $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pour ne pas changer

Critère basé sur le nombre de résidus

On a vu au cours sur la minimisation que :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Leftrightarrow L \text{ a un nombre fini de résidus } u^{-1}L.$$

Corollaire

Pour montrer qu'un langage L n'est pas reconnaissable, on peut montrer qu'il a un nombre infini de résidus différents.

Exemple : $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pour ne pas changer

- $L_k := (a^k)^{-1}L = \{a^n b^{n+k},\ n \in \mathbb{N}\}$
- si $i \neq j$, alors $L_i \neq L_j$.

$\rightsquigarrow \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **n'est pas reconnaissable.**

Plan

Méthode par opérations sur les langages

Pour montrer qu'un langage L est non reconnaissable, on peut :

1. supposer par l'absurde qu'il l'est,
2. exprimer un langage L' non reconnaissable à l'aide d'opération sur L et d'autres langages reconnaissables,
3. en déduire que L' serait alors reconnaissable. contradiction

Méthode par opérations sur les langages – Exemple 1

Méthode par intersection

Soit M un langage reconnaissable par un AF. Si $L' = L \cap M$ n'est pas reconnaissable par un AF, alors L non plus.

Méthode par opérations sur les langages – Exemple 1

Méthode par intersection

Soit M un langage reconnaissable par un AF. Si $L' = L \cap M$ n'est pas reconnaissable par un AF, alors L non plus.

Exemple : pour $L =$ mots bien parenthésés sur $A = \{(,)\}$

- si L reconnaissable, alors $L' = L \cap (^*)^*$ aussi
- or $L' = \{ (^n)^n, \; n \in \mathbb{N}\}$ pas reconnaissable

$\rightsquigarrow$ L **pas reconnaissable**

Méthode par opérations sur les langages – Exemple 2

Passage au complémentaire

Soit M un langage reconnaissable par un AF. Si $L' = M \setminus L$ n'est pas reconnaissable par un AF, alors L non plus.

Méthode par opérations sur les langages – Exemple 2

Passage au complémentaire

Soit M un langage reconnaissable par un AF. Si $L' = M \setminus L$ n'est pas reconnaissable par un AF, alors L non plus.

Exemple : pour $L = \{a^n b^m,\ n \neq m\}$

- si L reconnaissable, alors $a^* b^* \setminus L$ aussi
- or $a^* b^* \setminus L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pas reconnaissable

$\leadsto \{a^n b^m,\ n \neq m\}$ **pas reconnaissable**

Méthode par opérations sur les langages – Exemple 3

Technique valable avec toutes les autres opérations valides sur les langages rationels.

Méthode par opérations sur les langages – Exemple 3

Technique valable avec toutes les autres opérations valides sur les langages rationels.

Exemple : pour $L = \{a^n b^{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$

- si L reconnaissable, alors Lb^{-1} aussi
- or $Lb^{-1} = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pas reconnaissable

$\rightsquigarrow \{a^n b^{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ **pas reconnaissable**