# LASF – Critères de reconnaissabilité

Christophe Mouilleron

# Introduction

On sait reconnaître à l'aide d'un automate fini :

- le langage vide $\emptyset$,
- le langage $\{\varepsilon\}$,
- les langages finis.

De plus, si $L_1$ et $L_2$ sont reconnaissables, alors il en est de même de :

- $\text{Pré}(L_1)$, $\text{Suf}(L_1)$, $\text{Fact}(L_1)$, $u^{-1}L_1$ et $L_1u^{-1}$,
- $L_1^t$ et $A^* \setminus L_1$,
- $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \setminus L_2$, $L_1 \cdot L_2$ et $L_1^*$.

# Rappels – Introduction

On a vu (cours sur l'émondage d'automates) :

- langage infini reconnu par $\mathcal{A} \Rightarrow$ boucle dans $\mathcal{A}$
- un algorithme pour détecter les boucles dans un automate

# Rappels – Introduction

On a vu (cours sur l'émondage d'automates) :

- langage infini reconnu par $\mathcal{A} \Rightarrow$ boucle dans $\mathcal{A}$
- un algorithme pour détecter les boucles dans un automate

Aujourd'hui, on va :

- approfondir l'argument sur les boucles
- voir un critère pour montrer la non-reconnaissabilité d'un langage
- prouver la non reconnaissabilité de certains langages classiques
- voir d'autres méthodes pour montrer la non-reconnaissabilité

# Plan

1. Lemme de l'étoile
   - Exemple introductif
   - Lemme de l'étoile

2. Autres critères de non reconnaissabilité
   - Via les résidus
   - Via des opérations sur les langages

# Plan

# Exemple important

On veut montrer que $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

**Intuition :** Il faudrait une mémoire (arbitrairement grande) pour stocker le nombre $n$ de $a$ lus.

**Schéma de preuve :**

- raisonnement par l'absurde

# Exemple important

On veut montrer que $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

**Intuition :** Il faudrait une mémoire (arbitrairement grande) pour stocker le nombre $n$ de $a$ lus.

**Schéma de preuve :**

- raisonnement par l'absurde
- on se donne $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L$ $\qquad$ $\mathcal{A}$ a $N$ états

# Exemple important

On veut montrer que $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

**Intuition :** Il faudrait une mémoire (arbitrairement grande) pour stocker le nombre $n$ de $a$ lus.

**Schéma de preuve :**

- raisonnement par l'absurde
- on se donne $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L$ — $\mathcal{A}$ a $N$ états
- on se donne un mot de $L$ de longueur $> N$ — $a^N b^N$ convient

# Exemple important

On veut montrer que $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

**Intuition :** Il faudrait une mémoire (arbitrairement grande) pour stocker le nombre $n$ de $a$ lus.

**Schéma de preuve :**

- raisonnement par l'absurde
- on se donne $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L$ — $\mathcal{A}$ a $N$ états
- on se donne un mot de $L$ de longueur $> N$ — $a^N b^N$ convient
- on utilise une boucle dans $\mathcal{A}$ pour arriver à une contradiction

# Preuve en détail

1. On suppose que $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, E)$ reconnaît $L$.

2. On considère le mot $u = a^N b^N$ où $N = |Q|$. Comme $u \in L$, on a dans $\mathcal{A}$ un chemin

$$q_0 \in I \xrightarrow[a]{u_1} q_1 \xrightarrow[a]{u_2} \cdots \xrightarrow[a]{u_N} q_N \xrightarrow[b]{u_{N+1}} q_{N+1} \xrightarrow[b]{u_{N+2}} \cdots \xrightarrow[b]{u_{2N}} q_{2N} \in F.$$

3. Comme $2N > N$, il existe $i < j$ tels que $q_i = q_j$. On a donc une boucle dans $\mathcal{A}$. Il y alors 3 cas possibles :
   - soit $i < j \leq N$, boucle sur des $a$
   - soit $N \leq i < j$, boucle sur des $b$
   - soit $i < N < j$. boucle sur des $a$ puis des $b$

# Preuve en détail – suite

4. **Étude des cas.** Comme $q_i = q_j$, on a dans $A$ le chemin

$$q_0 \in I \xrightarrow{u_1} \cdots \xrightarrow{u_i} q_i = q_i \xrightarrow{u_{i+1}} q_{i+1} \xrightarrow{u_{i+2}} \cdots$$
$$\xrightarrow{u_j} q_j \xrightarrow{u_{j+1}} q_{j+1} \xrightarrow{u_{j+2}} \cdots \xrightarrow{u_{2N}} q_{2N} \in F.$$

Passage dans la boucle 2 fois

- si $i < j \leq N$, alors $a^{N+(j-i)}b^N \in L(\mathcal{A}) = L$ FAUX
- si $i < j \leq N$, alors $a^N b^{N+(j-i)} \in L(\mathcal{A}) = L$ FAUX
- si $i \leq N < j$, alors $a^N b^{j-N} a^{N-i} b^N \in L(\mathcal{A}) = L$ FAUX

5. Conclusion : contradiction dans tous les cas
$\rightsquigarrow L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **n'est pas reconnaissable.**

# Plan

# Lemme de l'étoile (ou lemme de pompage)

## Lemme de l'étoile

Si $L \in \mathrm{Rec}(A^*)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in L$ de longueur $\geq N$, on puisse trouver une factorisation $x = uvw$ vérifiant :

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $uv^n w \in L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

# Lemme de l'étoile (ou lemme de pompage)

## Lemme de l'étoile

Si $L \in \mathrm{Rec}(A^*)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in L$ de longueur $\geq N$, on puisse trouver une factorisation $x = uvw$ vérifiant :

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $uv^nw \in L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Preuve :**

- on se donne $\mathcal{A}$ reconnaissant $L$ et on note $N =$ nb d'états de $\mathcal{A}$,
- si $x \in L$, on a dans $A$ un chemin $q_0 \in I \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_k} q_k \in F$.
- comme $k = |x| \geq N$, il existe $i < j$ tels que $q_i = q_j$, et on découpe le chemin en trois parties :
$$q_0 \xrightarrow{u} q_i \xrightarrow{v} q_j = q_i \xrightarrow{w} q_k.$$
- si on boucle $n \in \mathbb{N}$ fois en $q_i$, on reconnaît bien $uv^nw$.

# Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\neg \left\{ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

# Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \neg \left\{ \forall x \in L,\ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

# Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ \neg \left\{ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

# Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ |x| > N \text{ et } \neg \left\{ \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

# Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w, \quad \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ |x| > N \ \text{ et }\ \forall u, v, w,\ \neg \left\{ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

# Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ |x| > N \text{ et } \forall u, v, w,\ \left\{ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et } v \neq \varepsilon \\ \Rightarrow \neg(\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

# Utilisation du lemme de l'étoile en pratique

Le lemme de l'étoile nous dit :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Rightarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in L,\ \left( |x| > N \Rightarrow \exists u, v, w,\quad \begin{array}{l} x = uvw \text{ et} \\ v \neq \varepsilon \text{ et} \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ uv^n w \in L) \end{array} \right)$$

En prenant la contraposée, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in L,\ |x| > N \text{ et } \forall u, v, w,\ \left\{ \begin{array}{l} x = uvw \text{ et } v \neq \varepsilon \\ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ uv^n w \notin L \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathrm{Rec}(A^*)$$

# Premier critère de non reconnaissabilité

Pour montrer que $L \subset A^*$ n'est pas reconnaissable, on peut utiliser :

**Corollaire**

Si pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un mot $x \in L$ de longueur $\geq N$ telle que pour toute décomposition $x = uvw$ avec $v \neq \varepsilon$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ qui vérifie $uv^nw \notin L$, alors $L$ n'est pas reconnaissable par un AF.

# Premier critère de non reconnaissabilité

Pour montrer que $L \subset A^*$ n'est pas reconnaissable, on peut utiliser :

**Corollaire**

Si pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un mot $x \in L$ de longueur $\geq N$ telle que pour toute décomposition $x = uvw$ avec $v \neq \varepsilon$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ qui vérifie $uv^nw \notin L$, alors $L$ n'est pas reconnaissable par un AF.

**Exemple :** encore $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

- Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on choisit $x = a^N b^N$.
- Si $x = uvw$, on a 3 cas possibles.
- Dans chaque cas, $uv^2w \notin L$ (donc $n = 2$ convient à chaque fois).

$\leadsto$ $\{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **n'est pas reconnaissable.**

# Autre exemple

On considère $L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$.

# Autre exemple

On considère $L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on choisit $x = a^N b a^N \in L$.

En décomposant $x = uvw$, on a 3 cas possibles :

# Autre exemple

On considère $L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on choisit $x = a^N b a^N \in L$.

En décomposant $x = uvw$, on a 3 cas possibles :

1. $u = a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{N-i-j} b a^N$. $uw \notin L$ (pas assez de $a$ à gauche)
2. $u = a^N b a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{N-i-j}$. $uw \notin L$ (pas assez de $a$ à droite)

# Autre exemple

On considère $L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on choisit $x = a^N b a^N \in L$.

En décomposant $x = uvw$, on a 3 cas possibles :

1. $u = a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{N-i-j} b a^N$. $uw \notin L$ (pas assez de $a$ à gauche)
2. $u = a^N b a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{N-i-j}$. $uw \notin L$ (pas assez de $a$ à droite)
3. $u = a^{N-i}$, $v = a^i b a^j$ et $w = a^{N-j}$. $uv^{12}w \notin L$ (trop de $b$)

$\rightsquigarrow L = \{a^n b^k a^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 3\}$ **n'est pas reconnaissable.**

# Remarque sur le lemme de l'étoile

**ATTENTION :**

Si on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que le langage $L$ vérifie les hypothèses du lemme de l'étoile, on ne peut rien conclure.

# Remarque sur le lemme de l'étoile

**ATTENTION :**

Si on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que le langage $L$ vérifie les hypothèses du lemme de l'étoile, on ne peut rien conclure.

Pour la culture, il existe des variantes :

- lemme de l'étoile faible = limite le nombre de cas pour $v$
- lemme de l'étoile fort = beaucoup plus complexe, mais permet de conclure à coup sûr

# Plan

# Critère basé sur le nombre de résidus

On a vu au cours sur la minimisation que :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Leftrightarrow L \text{ a un nombre fini de résidus } u^{-1}L.$$

## Corollaire

Pour montrer qu'un langage $L$ n'est pas reconnaissable, on peut montrer qu'il a un nombre infini de résidus différents.

**Exemple :** $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pour ne pas changer

# Critère basé sur le nombre de résidus

On a vu au cours sur la minimisation que :

$$L \in \mathrm{Rec}(A^*) \Leftrightarrow L \text{ a un nombre fini de résidus } u^{-1}L.$$

## Corollaire

Pour montrer qu'un langage $L$ n'est pas reconnaissable, on peut montrer qu'il a un nombre infini de résidus différents.

**Exemple :** $L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pour ne pas changer

- $L_k := (a^k)^{-1}L = \{a^n b^{n+k},\ n \in \mathbb{N}\}$
- si $i \neq j$, alors $L_i \neq L_j$.

$\rightsquigarrow \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **n'est pas reconnaissable.**

# Plan

# Méthode par opérations sur les langages

Pour montrer qu'un langage $L$ est non reconnaissable, on peut :

1. supposer par l'absurde qu'il l'est,
2. exprimer un langage $L'$ non reconnaissable à l'aide d'opération sur $L$ et d'autres langages reconnaissables,
3. en déduire que $L'$ serait alors reconnaissable. contradiction

# Méthode par opérations sur les langages – Exemple 1

## Méthode par intersection

Soit $M$ un langage reconnaissable par un AF. Si $L' = L \cap M$ n'est pas reconnaissable par un AF, alors $L$ non plus.

# Méthode par opérations sur les langages – Exemple 1

## Méthode par intersection

Soit $M$ un langage reconnaissable par un AF. Si $L' = L \cap M$ n'est pas reconnaissable par un AF, alors $L$ non plus.

**Exemple :** pour $L =$ mots bien parenthésés sur $A = \{(,)\}$

- si $L$ reconnaissable, alors $L' = L \cap (^*)^*$ aussi
- or $L' = \{ (^n)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pas reconnaissable

$\rightsquigarrow$ $L$ **pas reconnaissable**

# Méthode par opérations sur les langages – Exemple 2

### Passage au complémentaire

Soit $M$ un langage reconnaissable par un AF. Si $L' = M \setminus L$ n'est pas reconnaissable par un AF, alors $L$ non plus.

# Méthode par opérations sur les langages – Exemple 2

### Passage au complémentaire

Soit $M$ un langage reconnaissable par un AF. Si $L' = M \setminus L$ n'est pas reconnaissable par un AF, alors $L$ non plus.

**Exemple :** pour $L = \{a^n b^m,\ n \neq m\}$

- si $L$ reconnaissable, alors $a^* b^* \setminus L$ aussi
- or $a^* b^* \setminus L = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pas reconnaissable

$\rightsquigarrow \{a^n b^m,\ n \neq m\}$ **pas reconnaissable**

# Méthode par opérations sur les langages – Exemple 3

Technique valable avec toutes les autres opérations valides sur les langages rationels.

# Méthode par opérations sur les langages – Exemple 3

Technique valable avec toutes les autres opérations valides sur les langages rationels.

**Exemple :** pour $L = \{a^n b^{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$

- si $L$ reconnaissable, alors $Lb^{-1}$ aussi
- or $Lb^{-1} = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pas reconnaissable

$\rightsquigarrow \{a^n b^{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ **pas reconnaissable**