

TD 1 : Mots, langages, et automates

Exercice 1 - Inclusions

On considère l'alphabet $A = \{a, b\}$, et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

1.1 Déterminer toutes les inclusions possibles entre les langages suivants :

- (i) l'ensemble de tous les mots de longueur n ,
- (ii) l'ensemble des mots s'écrivant comme une succession de a suivie d'une succession de b ,
- (iii) l'ensemble des mots avec autant de a que de b ,
- (iv) l'ensemble des mots de longueur n avec autant de a que de b ,
- (v) l'ensemble des mots où aucun a n'apparaît après un b .

Exercice 2 - Une propriété sur les mots

(examen 2012-2013)

On considère un mot w de 8 lettres sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. On suppose que w n'a pas de facteur cubique (= de la forme uuu où u est un mot sur A).

2.1 Dresser la liste de tous les mots cubiques de $n \leq 8$ lettres.

2.2 Donner un exemple de mot w vérifiant les hypothèses faites dans l'énoncé.

2.3 En étudiant les différents cas possibles, montrer que w a forcément un facteur $abba$ ou un facteur $baab$. On pourra s'appuyer sur un arbre de possibilités.

2.4 Trouver un mot de 7 lettres sur A qui ne contient pas de facteur cubique, ni de facteur $abba$ ou $baab$.

Exercice 3 - Combinatoire

On considère l'alphabet A composé de k lettres.

3.1 Combien y a-t-il de mots de longueur n ?

3.2 Combien y a-t-il de mots de longueur n contenant exactement l fois une lettre donnée ?

3.3 Combien de facteurs de longueur 3 un mot de $n > 3$ lettres peut-il avoir au minimum ? et au maximum ? Donner des exemples atteignant ces valeurs.

Exercice 4 - Opérations sur les langages

On considère l'alphabet $A = \{a, b\}$, et le langage $L = \{a, ba, ab\}$.

4.1 Déterminer $M = \{u^2, u \in L\}$.

4.2 Déterminer L^2 et comparer le résultat avec M .

4.3 Expliquer pourquoi les mots de L^* ont plus (ou autant) de a que de b .

4.4 Trouver un mot avec autant de a et b , mais qui n'appartient pas à L^* .

4.5 Déterminer $a^{-1}M$.

4.6 Vérifier que $a^{-1}L = La^{-1}$.

Exercice 5 - Du langage à l'automate

Pour chacun des langages suivants, proposer un automate fini reconnaissant ce langage.

5.1 $\{u \in A^*, |u|_a = 3\}$ sur $A = \{a, b\}$.

5.2 $\{u \in A^*, |u|_b > 2\}$ sur $A = \{a, b\}$.

5.3 $\{u \in A^*, bac \text{ est un facteur de } u\}$ sur $A = \{a, b, c\}$.

5.4 L'ensemble des puissances de 2 écrites en binaire avec lecture de droite à gauche.

5.5 L'ensemble des puissances de 4 écrites en binaire avec lecture de gauche à droite.

5.6 $\{u \in A^*, |u|_a \not\equiv |u|_b \pmod{2}\}$ sur $A = \{a, b\}$.