TD 2 : Opérations sur les automates finis

Exercice 1 - Opérations sur les automates

1.1 Soit $A = \{a, b\}$. Proposer des automates finis reconnaissant les langages suivants :

(i) $L_1 = \{u \in A^*,\ |u|_b > 1\}$

(ii) $L_2 = \{u \in A^*,\ ab$ est un facteur de $u\}$

(iii) $L_3 = \{u \in A^*,\ u$ commence par $ba\}$

1.2 En utilisant les opérations sur les automates vues en cours, déduire des automates finis pour reconnaître les langages suivants :

$$L'_1 := L_2 \cup L_3, \qquad L'_2 := L_2^t, \qquad L'_3 := L_3 \cap L_2^t, \qquad L'_4 := L_1 \cap L_3.$$

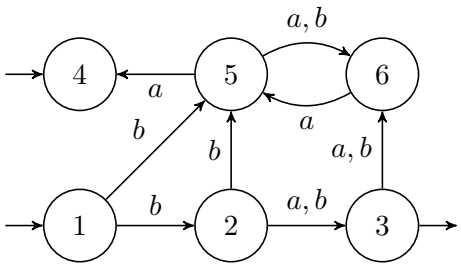
1.3 Décrire les mots appartenant aux langages L'_1 à L'_4, puis construire quand c'est possible un automate fini reconnaissant ces langages avec moins d'états qu'à la question précédente.

Exercice 2 - Émondage d'automates

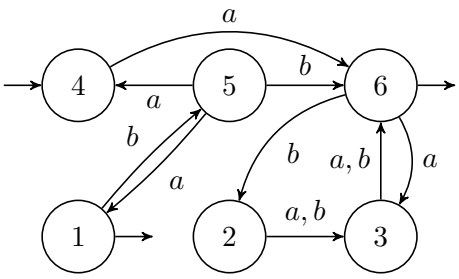
2.1 Expliquer comment adapter l'algorithme `accessibilite` vu en cours pour déterminer en une passe tous les états accessibles.

2.2 Pour chacun des automates suivants, déterminer les états accessibles, les états co-accessibles, puis calculer l'automate émondé équivalent :

(i)



(ii)



Exercice 3 - Opérations sur les automates (examen 2021-2022)

Dans cet exercice, l'alphabet est $A = \{a, b\}$.

3.1 Donner un automate pour le langage L_1 des mots se terminant par aa.

3.2 En déduire un automate pour L_1^*.

3.3 Existe-t-il :

(i) un mot de L_1 qui n'est pas dans L_1^* ?

(ii) un mot de L_1^* qui n'est pas dans L_1 ?

3.4 Donner un automate pour le langage $L_2 = \{u \in A^*, |u|_b \equiv 1 \bmod 2\}$ des mots avec un nombre impair de b.

3.5 Construire un automate pour le langage $L_1 \cap L_2$.

3.6 Quel est le plus petit mot de $L_1 \cap L_2$?

Exercice 4 - Normalisation d'un automate

Un automate normalisé est un automate fini qui :

(i) n'a qu'un seul état initial i,

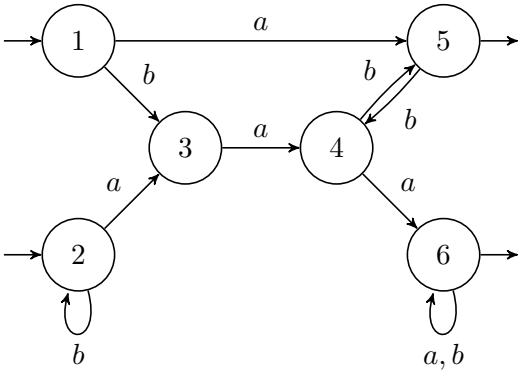
(ii) n'a qu'un seul état final f,

(iii) n'a aucune transition menant en i,

(iv) n'a aucune transition partant de f.

En particulier, on notera que tout automate normalisé est un automate standard.

4.1 Construire un automate normalisé équivalent à l'automate suivant :



4.2 Proposer un algorithme `normalisation` permettant de construire, étant donné un automate $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, E)$, un automate normalisé équivalent à $\mathcal{A}$.

4.3 Vérifier à l'aide de l'exemple de la question 1 que cet algorithme semble correct.

4.4 Démontrer que cet algorithme est correct.

4.5 Comment utiliser cette normalisation pour reconnaître un produit de deux langages reconnaissables ? Comparer avec la méthode vue en cours.