Logique propositionnelle

Christophe Mouilleron

ensIIE

Plan

Plan

1. Formules en logique propositionnelle
   - Syntaxe et sémantique
   - Tables de vérité
   - Preuves sémantiques
2. Formes normales conjonctives et problèmes SAT
   - Formes normales conjonctives
   - Problèmes SAT
3. Déduction naturelle
   - Séquents et règles de la déduction naturelle
   - Preuve en déduction naturelle
4. Bilan

Plan

Définition inductive des formules logiques

Soit $V = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble infini de variables.

L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules du calcul propositionnel est défini inductivement comme suit :

(B_1) $\top$ est une formule

(B_2) $\bot$ est une formule

(B_3) Toute variable est une formule

(K_1) Si F est une formule, alors $\neg F$ est une formule

(K_2) Si F_1 et F_2 sont des formules, alors $F_1 \wedge F_2$ aussi

(K_3) Si F_1 et F_2 sont des formules, alors $F_1 \vee F_2$ aussi

(K_4) Si F_1 et F_2 sont des formules, alors $F_1 \Rightarrow F_2$ aussi.

Priorité des opérateurs

$\neg$ a la plus forte priorité
suivi de $\wedge$
suivi de $\vee$
suivi de $\Rightarrow$

Associativité :

- à gauche pour $\vee$ et $\wedge$
- à droite pour $\Rightarrow$

Priorité des opérateurs

$\neg$ a la plus forte priorité
suivi de $\wedge$
suivi de $\vee$
suivi de $\Rightarrow$

Associativité :

- à gauche pour $\vee$ et $\wedge$
- à droite pour $\Rightarrow$

$\neg p \vee q \wedge r \Rightarrow s \Rightarrow t$ se comprend

Priorité des opérateurs

$\neg$ a la plus forte priorité
suivi de $\wedge$
suivi de $\vee$
suivi de $\Rightarrow$

Associativité :

- à gauche pour $\vee$ et $\wedge$
- à droite pour $\Rightarrow$

$\neg p \vee q \wedge r \Rightarrow s \Rightarrow t$ se comprend $\Big((\neg p) \vee (q \wedge r)\Big) \Rightarrow \Big(s \Rightarrow t\Big)$

Sémantique = donner un sens aux formules

Pour le moment :

Formule = « Gros tas de symboles sans aucun sens »

Considérons la formule $p \vee q \Rightarrow r$.
Est-elle vraie ou fausse ?

Sémantique = donner un sens aux formules

Pour le moment :

Formule = « Gros tas de symboles sans aucun sens »

Considérons la formule $p \vee q \Rightarrow r$.
Est-elle vraie ou fausse ?

Ça dépend . . .

Sémantique = donner un sens aux formules

Pour le moment :

Formule = « Gros tas de symboles sans aucun sens »

Considérons la formule $p \vee q \Rightarrow r$.
Est-elle vraie ou fausse ?

Ça dépend . . .

- de la valeur des variables p, q et r vrai ou faux

Sémantique = donner un sens aux formules

Pour le moment :

Formule = « Gros tas de symboles sans aucun sens »

Considérons la formule $p \vee q \Rightarrow r$.
Est-elle vraie ou fausse ?

Ça dépend ...

- de la signification des symboles $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$
- de la valeur des variables p, q et r vrai ou faux

Sémantique = donner un sens aux formules

Pour le moment :

Formule = « Gros tas de symboles sans aucun sens »

Considérons la formule $p \vee q \Rightarrow r$.
Est-elle vraie ou fausse ?

Ça dépend ...

- de la signification des symboles $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$
- de la valeur des variables p, q et r vrai ou faux

Mais cela ne dépend pas de la signification de p, q et r.

Algèbre de Boole

L'ensemble $\mathbb{B}$ est défini par :

- $0 \in \mathbb{B}$ ou $\bot$, ou `false`
- $1 \in \mathbb{B}$ ou $\top$, ou `true`

$\rightsquigarrow$ déf. inductive avec 0 constructeur

Algèbre de Boole

L'ensemble $\mathbb{B}$ est défini par :

- $0 \in \mathbb{B}$ — ou $\perp$, ou `false`
- $1 \in \mathbb{B}$ — ou $\top$, ou `true`

$\rightsquigarrow$ déf. inductive avec 0 constructeur

Opérations classiques dans $\mathbb{B}$:

x	$\dot{\neg}\, y$
0	1
1	0

x	y	$x \dot{\vee} y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \dot{\wedge} y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \dot{\Rightarrow} y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Algèbre de Boole

L'ensemble $\mathbb{B}$ est défini par :

- $0 \in \mathbb{B}$ — ou $\bot$, ou `false`
- $1 \in \mathbb{B}$ — ou $\top$, ou `true`

$\rightsquigarrow$ déf. inductive avec 0 constructeur

Opérations classiques dans $\mathbb{B}$:

x	$\dot{\neg}\, y$
0	1
1	0

x	y	$x \dot{\vee} y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \dot{\wedge} y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \dot{\Rightarrow} y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Interprétation des formules logiques

Une interprétation est une fonction $I : V \to \mathbb{B}$.

Interprétation des formules logiques

Une interprétation est une fonction $I : V \to \mathbb{B}$.

On étend I aux formules propositionnelles de manière inductive par :

(B_1) $I(\top) = 1$ vrai

(B_2) $I(\bot) = 0$ faux

(B_3) Si $F = x$ avec x une variable, alors $I(F) = I(x)$

(K_1) Si $F = \neg F_1$, alors $I(F) = \dot{\neg}\, I(F_1)$ négation

(K_2) Si $F = F_1 \wedge F_2$, alors $I(F) = I(F_1)\, \dot{\wedge}\, I(F_2)$ et logique

(K_3) Si $F = F_1 \vee F_2$, alors $I(F) = I(F_1)\, \dot{\vee}\, I(F_2)$ ou logique

(K_4) Si $F = F_1 \Rightarrow F_2$, alors $I(F) = I(F_1)\, \dot{\Rightarrow}\, I(F_2)$ implication

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $I \models F$

Si $I(p) = I(q) = I(r) = 1$, alors $I(p \vee q \Rightarrow r) = 1$ $I \models p \vee q \Rightarrow r$

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $I \models F$

Si $I(p) = I(r) = 0$ et $I(q) = 1$, alors $I(p \vee q \Rightarrow r) = 0$ $I \not\models p \vee q \Rightarrow r$

Quelques définitions

- On dit que *I satisfait F* lorsque $I(F) = 1$. $I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.

Si $I(p) = 1$, alors $I \models \{p \vee q, \neg p \Rightarrow r\}$

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.

Si $I(p) = 1$, alors $I \not\models \{p \vee q, \neg p\}$

Quelques définitions

- On dit que I **satisfait** F lorsque $I(F) = 1$. $I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules, on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.
- On dit que F est une **tautologie** lorsque $I(F) = 1$ pour **toute interprétation** I. $\models F$

$p \vee \neg p, \quad p \Rightarrow p \quad \text{et} \quad (p \Rightarrow r) \vee (\neg p \Rightarrow r)$ sont des tautologies

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.
- On dit que F est une tautologie
  lorsque $I(F) = 1$ pour toute interprétation I. $\models F$

$(p \Rightarrow r) \land (\neg p \Rightarrow r)$ n'est pas une tautologie

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.
- On dit que F est une tautologie
  lorsque $I(F) = 1$ pour toute interprétation I. $\models F$
- On dit que Σ est contradictoire
  lorsqu'aucune interprétation I ne vérifie $I \models \Sigma$.

$\{p \wedge \neg p\}$, $\{p, \neg q, p \Rightarrow q\}$ sont contradictoires

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $\qquad I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.
- On dit que F est une tautologie
  lorsque $I(F) = 1$ pour toute interprétation I. $\qquad \models F$
- On dit que Σ est contradictoire
  lorsqu'aucune interprétation I ne vérifie $I \models \Sigma$.

$\{p \wedge q\}$, $\{p, q, p \Rightarrow q\}$ ne sont pas contradictoires

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $\quad I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.
- On dit que F est une tautologie
  lorsque $I(F) = 1$ pour toute interprétation I. $\quad \models F$
- On dit que Σ est contradictoire
  lorsqu'aucune interprétation I ne vérifie $I \models \Sigma$.
- On dit que F se déduit sémantiquement de Σ lorsque
  toute interprétation qui satisfait Σ satisfait aussi F. $\quad \Sigma \models F$

$$\{p, p \Rightarrow q\} \models q, \qquad \{p \vee q, p \Rightarrow q\} \models q$$

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.
- On dit que F est une tautologie
  lorsque $I(F) = 1$ pour toute interprétation I. $\models F$
- On dit que Σ est contradictoire
  lorsqu'aucune interprétation I ne vérifie $I \models \Sigma$.
- On dit que F se déduit sémantiquement de Σ lorsque
  toute interprétation qui satisfait Σ satisfait aussi F. $\Sigma \models F$

$\{p, q \Rightarrow p\}$ ne satisfait pas q $\{p, q \Rightarrow p\} \not\models q$

Quelques définitions

- On dit que *I* satisfait *F* lorsque $I(F) = 1$. $I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.
- On dit que F est une tautologie
  lorsque $I(F) = 1$ pour toute interprétation I. $\models F$
- On dit que Σ est contradictoire
  lorsqu'aucune interprétation I ne vérifie $I \models \Sigma$.
- On dit que F se déduit sémantiquement de Σ lorsque
  toute interprétation qui satisfait Σ satisfait aussi F. $\Sigma \models F$
- On dit que F et G sont sémantiquement équivalentes
  lorsque $\{F\} \models G$ et $\{G\} \models F$. $F \equiv G$

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q, \qquad p \equiv \neg\neg p$

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $\qquad I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.
- On dit que F est une tautologie
  lorsque $I(F) = 1$ pour toute interprétation I. $\qquad \models F$
- On dit que Σ est contradictoire
  lorsqu'aucune interprétation I ne vérifie $I \models \Sigma$.
- On dit que F se déduit sémantiquement de Σ lorsque
  toute interprétation qui satisfait Σ satisfait aussi F. $\qquad \Sigma \models F$
- On dit que F et G sont sémantiquement équivalentes
  lorsque $\{F\} \models G$ et $\{G\} \models F$. $\qquad F \equiv G$

$p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p$

Quelques définitions

- On dit que I satisfait F lorsque $I(F) = 1$. $\quad I \models F$
- Si Σ est un ensemble de formules,
  on note $I \models \Sigma$ lorsque $I(F) = 1$ pour toute $F \in \Sigma$.
- On dit que F est une tautologie
  lorsque $I(F) = 1$ pour toute interprétation I. $\quad \models F$
- On dit que Σ est contradictoire
  lorsqu'aucune interprétation I ne vérifie $I \models \Sigma$.
- On dit que F se déduit sémantiquement de Σ lorsque
  toute interprétation qui satisfait Σ satisfait aussi F. $\quad \Sigma \models F$
- On dit que F et G sont sémantiquement équivalentes
  lorsque $\{F\} \models G$ et $\{G\} \models F$. $\quad F \equiv G$

Plan

Table de vérité d'une formule

Idée = dresser la table de toutes les interprétations possibles

- une ligne par interprétation = valeurs possibles des variables
- une colonne par sous-formule

Exemple : $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

p	q	$p \Rightarrow q$		
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Table de vérité d'une formule

Idée = dresser la table de toutes les interprétations possibles

- une ligne par interprétation = valeurs possibles des variables
- une colonne par sous-formule

Exemple : $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	
0	0	1		
0	1	1		
1	0	0		
1	1	1		

Table de vérité d'une formule

Idée = dresser la table de toutes les interprétations possibles

- une ligne par interprétation = valeurs possibles des variables
- une colonne par sous-formule

Exemple : $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$
0	0	1	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	1	1	0	

Table de vérité d'une formule

Idée = dresser la table de toutes les interprétations possibles

- une ligne par interprétation = valeurs possibles des variables
- une colonne par sous-formule

Exemple : $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

Preuve par table de vérité

Idée :

- montrer $I \models F$ = vérifier la ligne correspondante

Exemple : $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

p	q	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- F est satisfaite quand $I(p) = I(q) = 0$

Preuve par table de vérité

Idée :

- montrer $I \models F$ = vérifier la ligne correspondante
- F contradictoire = toutes les lignes donnent la valeur 0

Exemple : $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

p	q	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- F est satisfaite quand $I(p) = I(q) = 0$
- F n'est pas une contradiction

Preuve par table de vérité

Idée :

- montrer $I \models F$ = vérifier la ligne correspondante
- F contradictoire = toutes les lignes donnent la valeur 0
- F tautologie = toutes les lignes donnent la valeur 1

Exemple : $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

p	q	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- F est satisfaite quand $I(p) = I(q) = 0$
- F n'est pas une contradiction
- F n'est pas une tautologie

Équivalences classiques (1)

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
x \land x & \equiv & x & x \land (y \land z) & \equiv & (x \land y) \land z \\
x \lor x & \equiv & x & x \lor (y \lor z) & \equiv & (x \lor y) \lor z \\
x \land y & \equiv & y \land x & x \land (y \lor z) & \equiv & (x \land y) \lor (x \land z) \\
x \lor y & \equiv & y \lor x & x \lor (y \land z) & \equiv & (x \lor y) \land (x \lor z) \\
\neg(x \land y) & \equiv & \neg x \lor \neg y & x \Rightarrow y & \equiv & \neg x \lor y \\
\neg(x \lor y) & \equiv & \neg x \land \neg y & \neg(x \Rightarrow y) & \equiv & x \land \neg y \\
\bot \land x & \equiv & \bot & \neg\neg x & \equiv & x \\
\bot \lor x & \equiv & x & & &
\end{array}
$$

Preuve =

- faire les tables de vérité des formules à gauche et à droite de $\equiv$
- vérifier l'égalité des deux tables

Équivalences classiques (2)

On peut montrer que les équivalences restent vraies si on remplace les variables par des formules :

$$
\begin{array}{rcl}
F \wedge F \equiv F & \quad & F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H \\
F \vee F \equiv F & & F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H \\
F \wedge G \equiv G \wedge F & & F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \\
F \vee G \equiv G \vee F & & F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H) \\
\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G & & F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G \\
\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G & & \neg(F \Rightarrow G) \equiv F \wedge \neg G \\
\bot \wedge F \equiv \bot & & \neg\neg F \equiv F \\
\bot \vee F \equiv F & &
\end{array}
$$

Plan

Preuve sémantique

Idée = formaliser une démonstration en

- écrivant explicitement les interprétations
- utilisant les règles de calculs :

  si $I(A) = 1$ et $I(B) = 0$, alors $I(A \wedge B) = I(A) \dot{\wedge} I(B) = 1 \dot{\wedge} 0 = 0$

Preuve sémantique

Idée = formaliser une démonstration en

- écrivant explicitement les interprétations
- utilisant les règles de calculs :

  si $I(A) = 1$ et $I(B) = 0$, alors $I(A \land B) = I(A) \dot{\land} I(B) = 1 \dot{\land} 0 = 0$
- déduisant à partir des tables de vérité des connecteurs :

  si $I(A \Rightarrow B) = 1$ et $I(A) = 1$, alors

A	B	$A \dot{\Rightarrow} B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Preuve sémantique

Idée = formaliser une démonstration en

- écrivant explicitement les interprétations
- utilisant les règles de calculs :

  si $I(A) = 1$ et $I(B) = 0$, alors $I(A \wedge B) = I(A) \dot{\wedge} I(B) = 1 \dot{\wedge} 0 = 0$
- déduisant à partir des tables de vérité des connecteurs :

  si $I(A \Rightarrow B) = 1$ et $I(A) = 1$,
  alors $I(B) = 1$

A	B	$A \dot{\Rightarrow} B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Preuve sémantique – Exemple (1)

Un logicien écoute un de ses apprenants énumérer ses sentiments à propos des cours que ce dernier suit :

1. J'aime la logique ou j'aime l'informatique,
2. Si j'aime l'informatique, alors j'aime la logique.

Le logicien conclut que l'apprenant aime la logique. Pourquoi ?

Preuve sémantique – Exemple (1)

Un logicien écoute un de ses apprenants énumérer ses sentiments à propos des cours que ce dernier suit :

1. J'aime la logique ou j'aime l'informatique,
2. Si j'aime l'informatique, alors j'aime la logique.

Le logicien conclut que l'apprenant aime la logique. Pourquoi ?

$\rightsquigarrow$ Modélisation du problème

On note :

A = « l'apprenant aime la logique »

B = « l'apprenant aime l'informatique »

On obtient :

1. $A \vee B$
2. $B \Rightarrow A$

Preuve sémantique – Exemple (2)

Objectif : Montrer $\{ A \vee B,\ B \Rightarrow A \} \models A$

On se donne une interprétation I telle que :

(H_1) $I(A \vee B) = 1$

(H_2) $I(B \Rightarrow A) = 1$

et on essaie de montrer $I(A) = 1$.

Preuve sémantique – Exemple (2)

Objectif : Montrer $\{ A \vee B,\ B \Rightarrow A \} \models A$

On se donne une interprétation I telle que :

$$(H_1)\ \ I(A \vee B) = 1$$

$$(H_2)\ \ I(B \Rightarrow A) = 1$$

et on essaie de montrer $I(A) = 1$.

On peut faire une preuve par cas sur la valeur de $I(B)$:

Cas $I(B) = 1$ D'après H_2 et la table de $\dot{\Rightarrow}$, on a forcément $I(A) = 1$.

Cas $I(B) = 0$ D'après H_1 et la table de $\dot{\vee}$, on a forcément $I(A) = 1$.

$\leadsto$ Dans tous les cas, on a bien $I(A) = 1$.

Plan

Plan

Littéraux, clauses et formes normales conjonctives

Littéral = variable ou négation de variable p, $\neg q$

$p \lor p$, $\neg\neg q$

Littéraux, clauses et formes normales conjonctives

Littéral = variable ou négation de variable p, $\neg q$

$p \vee p$, $\neg\neg q$

Clause = disjonction de littéraux $p \vee \neg q$, $x \vee \neg y \vee \neg z$

Littéraux, clauses et formes normales conjonctives

Littéral = variable ou négation de variable $p, \neg q$

$p \vee p, \neg\neg q$

Clause = disjonction de littéraux $p \vee \neg q, x \vee \neg y \vee \neg z$

- éventuellement un seul littéral $\neg p$
- éventuellement aucun littéral $\perp$

Littéraux, clauses et formes normales conjonctives

Littéral = variable ou négation de variable $p, \neg q$

$p \vee p, \neg\neg q$

Clause = disjonction de littéraux $p \vee \neg q, x \vee \neg y \vee \neg z$

- éventuellement un seul littéral $\neg p$
- éventuellement aucun littéral $\perp$

$\neg(p \vee q), p \wedge q, (\neg\neg p) \vee q$

Littéraux, clauses et formes normales conjonctives

Littéral = variable ou négation de variable $p, \neg q$

$p \vee p, \neg\neg q$

Clause = disjonction de littéraux $p \vee \neg q, x \vee \neg y \vee \neg z$

- éventuellement un seul littéral $\neg p$
- éventuellement aucun littéral $\bot$

$\neg(p \vee q), p \wedge q, (\neg\neg p) \vee q$

Forme normale conjonctive = conjonction de clauses $(p \vee q) \wedge \neg r$

Littéraux, clauses et formes normales conjonctives

Littéral = variable ou négation de variable $p, \neg q$

$p \vee p, \neg\neg q$

Clause = disjonction de littéraux $p \vee \neg q, x \vee \neg y \vee \neg z$

- éventuellement un seul littéral $\neg p$
- éventuellement aucun littéral $\bot$

$\neg(p \vee q), p \wedge q, (\neg\neg p) \vee q$

Forme normale conjonctive = conjonction de clauses $(p \vee q) \wedge \neg r$

- éventuellement une seule clause $p, \neg q, \neg p \vee q$
- souvent abrégé en FNC (fr) ou CNF (en)

Littéraux, clauses et formes normales conjonctives

Littéral = variable ou négation de variable p, $\neg q$

$p \vee p$, $\neg\neg q$

Clause = disjonction de littéraux $p \vee \neg q$, $x \vee \neg y \vee \neg z$

- éventuellement un seul littéral $\neg p$
- éventuellement aucun littéral $\perp$

$\neg(p \vee q)$, $p \wedge q$, $(\neg\neg p) \vee q$

Forme normale conjonctive = conjonction de clauses $(p \vee q) \wedge \neg r$

- éventuellement une seule clause p, $\neg q$, $\neg p \vee q$
- souvent abrégé en FNC (fr) ou CNF (en)

$\neg(p \wedge q)$, $(p \wedge q) \vee r$

Littéraux, clauses et formes normales conjonctives

Littéral = variable ou négation de variable p, $\neg q$

$\cancel{p \vee p}$, $\cancel{\neg\neg q}$

Clause = disjonction de littéraux $p \vee \neg q$, $x \vee \neg y \vee \neg z$

- éventuellement un seul littéral $\neg p$
- éventuellement aucun littéral $\bot$

$\cancel{\neg(p \vee q)}$, $\cancel{p \wedge q}$, $\cancel{(\neg\neg p) \vee q}$

Forme normale conjonctive = conjonction de clauses $(p \vee q) \wedge \neg r$

- éventuellement une seule clause p, $\neg q$, $\neg p \vee q$
- souvent abrégé en FNC (fr) ou CNF (en)

$\cancel{\neg(p \wedge q)}$, $\cancel{(p \wedge q) \vee r}$

Mise sous forme normale conjonctive (1)

Théorème

À toute formule F, on peut associer une formule G telle que :

- $F \equiv G$
- G est sous forme normale conjonctive

Mise sous forme normale conjonctive (1)

Théorème

À toute formule F, on peut associer une formule G telle que :

- $F \equiv G$
- G est sous forme normale conjonctive

Preuve :

1. remplacer les $\bot$ $\qquad \bot \equiv p \wedge \neg p$
2. remplacer les $\top$ $\qquad \top \equiv p \vee \neg p$

Mise sous forme normale conjonctive (1)

Théorème

À toute formule F, on peut associer une formule G telle que :

- $F \equiv G$
- G est sous forme normale conjonctive

Preuve :

1. remplacer les $\bot$ — $\bot \equiv p \wedge \neg p$
2. remplacer les $\top$ — $\top \equiv p \vee \neg p$
3. remplacer les $\Rightarrow$ — $X \Rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$

Mise sous forme normale conjonctive (1)

Théorème

À toute formule F, on peut associer une formule G telle que :

- $F \equiv G$
- G est sous forme normale conjonctive

Preuve :

1. remplacer les $\bot$ $\qquad \bot \equiv p \wedge \neg p$
2. remplacer les $\top$ $\qquad \top \equiv p \vee \neg p$
3. remplacer les $\Rightarrow$ $\qquad X \Rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$
4. remonter les $\neg$ au niveau des variables $\qquad \neg\neg F \equiv F$

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$$
$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$$

Mise sous forme normale conjonctive (1)

Théorème

À toute formule F, on peut associer une formule G telle que :

- $F \equiv G$
- G est sous forme normale conjonctive

Preuve :

1. remplacer les $\bot$ $\qquad \bot \equiv p \wedge \neg p$
2. remplacer les $\top$ $\qquad \top \equiv p \vee \neg p$
3. remplacer les $\Rightarrow$ $\qquad X \Rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$
4. remonter les $\neg$ au niveau des variables
$$\begin{aligned} \neg\neg F &\equiv F \\ \neg(F \wedge G) &\equiv \neg F \vee \neg G \\ \neg(F \vee G) &\equiv \neg F \wedge \neg G \end{aligned}$$
5. mettre les $\wedge$ à l'extérieur $\qquad F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Mise sous forme normale conjonctive (2)

Exemple : CNF pour $F = \neg\Big((p \Rightarrow q) \wedge r\Big)$?

Mise sous forme normale conjonctive (2)

Exemple : CNF pour $F = \neg\Big((p \Rightarrow q) \wedge r\Big)$?

$$F \rightsquigarrow \neg\Big((\neg p \vee q) \wedge r\Big) \quad \rightsquigarrow \Big(\neg(\neg p \vee q)\Big) \vee \neg r \quad \rightsquigarrow \Big(\neg\neg p \wedge \neg q\Big) \vee \neg r$$
$$\rightsquigarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r \qquad \rightsquigarrow (p \vee \neg r) \ \wedge \ (\neg q \vee \neg r)$$

Mise sous forme normale conjonctive (2)

Exemple : CNF pour $F = \neg\Big((p \Rightarrow q) \wedge r\Big)$?

$$F \rightsquigarrow \neg\Big((\neg p \vee q) \wedge r\Big) \quad \rightsquigarrow \Big(\neg(\neg p \vee q)\Big) \vee \neg r \quad \rightsquigarrow \Big(\neg\neg p \wedge \neg q\Big) \vee \neg r$$
$$\rightsquigarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r \qquad \rightsquigarrow (p \vee \neg r) \ \wedge \ (\neg q \vee \neg r)$$

Remarques :

- La méthode de la preuve peut faire exploser la taille de la formule.

$$(x_1 \wedge y_1) \vee \cdots \vee (x_n \wedge y_n) \qquad 2n \text{ littéraux}$$
$$\rightsquigarrow \quad (x_1 \vee \cdots \vee x_n) \wedge \cdots \wedge (y_1 \vee \cdots \vee y_n) \qquad 2^n \text{ littéraux}$$

- On peut faire beaucoup mieux (taille linéaire) en ajoutant de nouvelles variables. transformation de Tseitin

Plan

Le problème SAT (1)

Entrée = formule F en forme normale conjonctive

- une clause = une contrainte à satisfaire
- F = conjonction des contraintes

Le problème SAT (1)

Entrée = formule F en forme normale conjonctive

- une clause = une contrainte à satisfaire
- F = conjonction des contraintes

Sortie = F est-elle satisfaisable ?

si oui $\rightsquigarrow$ fournir aussi une interprétation I telle que $I(F) = 1$

si non $\rightsquigarrow$ F contradictoire

Le problème SAT (2)

Choses à savoir :

- intérêt pratique ET théorique
- variante k-SAT = k littéraux par clause
  - 2-SAT facile — polynomial
  - k-SAT difficile dès que $k \geq 3$ — NP-complet
- complexité très variable en pratique
  - on a rapidement $100+$ variables
  - certains pb. à $\simeq$ 100 variables restent impossibles à résoudre
  - certains pb. à $\simeq 1M$ variables sont résolus régulièrement

Résolution d'un problème SAT

Approches incomplètes :

- ✓ peut trouver rapidement une interprétation I telle que $I(F) = 1$
- ✗ peut ne pas trouver d'interprétation même si F est satisfiable
- ✗ ne permet pas de savoir si F est contradictoire

Résolution d'un problème SAT

Approches incomplètes :

- ✓ peut trouver rapidement une interprétation I telle que $I(F) = 1$
- ✗ peut ne pas trouver d'interprétation même si F est satisfiable
- ✗ ne permet pas de savoir si F est contradictoire

Approches complètes :

- ✓ donne toujours une réponse ...
- ✗ ... si suffisamment de temps et de mémoire

`minisat`, `glucose`, Sat4j

Format DIMACS CNF (simplifié)

Beaucoup de solveurs SAT acceptent du DIMACS CNF en entrée :

- commentaires = lignes commençant par `c`

```
c This is a comment.
```

- entête = ligne de la forme $\boxed{\texttt{p cnf } X\ Y}$
  - X = nb de variables
  - Y = nb de clauses

- clauses = Y lignes de la forme $\boxed{v_1\ v_2 \ldots v_n\ \texttt{0}}$
  - $v_i = k \quad \rightsquigarrow \quad k^{\text{e}}$ variable
  - $v_i = -k \quad \rightsquigarrow \quad$ négation de la k^{e} variable

`-1 2 -3 0` $\quad \rightsquigarrow \quad \neg a \vee b \vee \neg c$

Problème SAT – Exemple 1

Trois étudiants Jean, Paulette et Nicolas sont accusés d'avoir introduit un virus dans la salle informatique. Lors de leur audition, ils déclarent :

Jean	C'est Paulette qui l'a fait et Nicolas est innocent.
Paulette	Si Jean est coupable, alors Nicolas l'est aussi.
Nicolas	Ce n'est pas moi, mais un des 2 autres, peut-être les 2.

Ces 3 déclarations sont-elles contradictoires ?

Problème SAT – Exemple 1

Trois étudiants Jean, Paulette et Nicolas sont accusés d'avoir introduit un virus dans la salle informatique. Lors de leur audition, ils déclarent :

Jean	C'est Paulette qui l'a fait et Nicolas est innocent.
Paulette	Si Jean est coupable, alors Nicolas l'est aussi.
Nicolas	Ce n'est pas moi, mais un des 2 autres, peut-être les 2.

Ces 3 déclarations sont-elles contradictoires ?

Modélisation :

- J = « Jean est coupable »
- P = « Paulette est coupable »
- N = « Nicolas est coupable »

1. $P \wedge \neg N$
2. $J \Rightarrow N \equiv \neg J \vee N$
3. $\neg N \wedge (J \vee P)$

$\rightsquigarrow$ $F = P \wedge \neg N \wedge (\neg J \vee N) \wedge \neg N \wedge (J \vee P)$ est-elle satisfiable ?

Problème SAT – Exemple 1 (suite)

$\rightsquigarrow$ $F = P \wedge \neg N \wedge (\neg J \vee N) \wedge \neg N \wedge (J \vee P)$ est-elle satisfiable ?

3 variables = $J \mapsto 1$ $P \mapsto 2$ $N \mapsto 3$

4 clauses = P, $\neg N$ ($\times$2), $(\neg J \vee N)$ et $(J \vee P)$ cf `virus.cnf`

```
$ minisat virus.cnf $(tty)
[...]
SAT
-1 2 -3 0
```

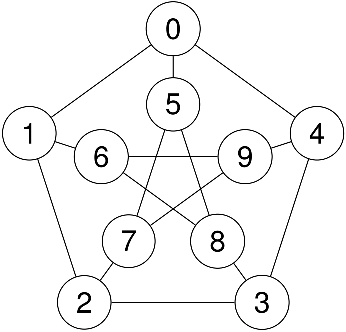
```
$ glucose -model virus.cnf
[...]
s SATISFIABLE
v -1 2 -3 0
```

$I(F) = 1$ au moins lorsque :

- $I(J) = I(N) = 0$
- $I(P) = 1$

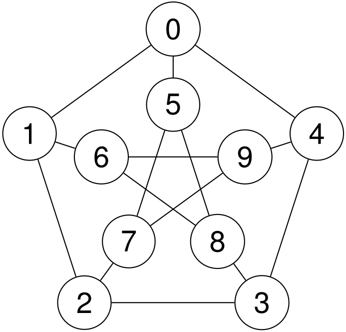
$\rightsquigarrow$ F non contradictoire

Problème SAT – Exemple 2



Peut-on colorier les nœuds de ce graphe avec seulement 3 couleurs de sorte que deux nœuds voisins n'aient pas la même couleur ?

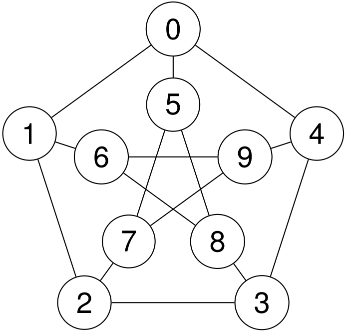
Problème SAT – Exemple 2



Peut-on colorier les nœuds de ce graphe avec seulement 3 couleurs de sorte que deux nœuds voisins n'aient pas la même couleur ?

- $v_{i,j}$ = le nœud j est colorié en i 30 variables
- le nœud j a une couleur
- le nœud j n'a pas à la fois les couleurs i et i'
- deux voisins j et j' n'ont pas la même couleur i

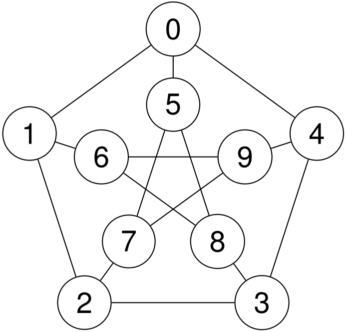
Problème SAT – Exemple 2



Peut-on colorier les nœuds de ce graphe avec seulement 3 couleurs de sorte que deux nœuds voisins n'aient pas la même couleur ?

- $v_{i,j}$ = le nœud j est colorié en i — 30 variables
- le nœud j a une couleur — $v_{1,j} \vee v_{2,j} \vee v_{3,j}$ — 10 clauses
- le nœud j n'a pas à la fois les couleurs i et i'
- deux voisins j et j' n'ont pas la même couleur i

Problème SAT – Exemple 2



Peut-on colorier les nœuds de ce graphe avec seulement 3 couleurs de sorte que deux nœuds voisins n'aient pas la même couleur ?

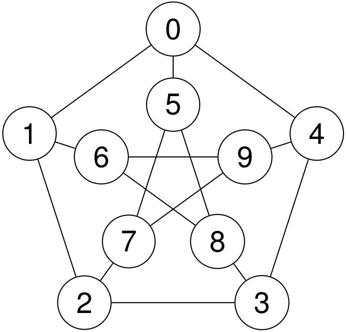
- $v_{i,j}$ = le nœud j est colorié en i — 30 variables
- le nœud j a une couleur $\quad v_{1,j} \vee v_{2,j} \vee v_{3,j}$ — 10 clauses
- le nœud j n'a pas à la fois les couleurs i et i'

$$\neg v_{i,j} \vee \neg v_{i',j}$$

30 clauses

- deux voisins j et j' n'ont pas la même couleur i

Problème SAT – Exemple 2



Peut-on colorier les nœuds de ce graphe avec seulement 3 couleurs de sorte que deux nœuds voisins n'aient pas la même couleur ?

- $v_{i,j}$ = le nœud j est colorié en i — 30 variables
- le nœud j a une couleur $\quad v_{1,j} \vee v_{2,j} \vee v_{3,j}$ — 10 clauses
- le nœud j n'a pas à la fois les couleurs i et i'

$$\neg v_{i,j} \vee \neg v_{i',j}$$

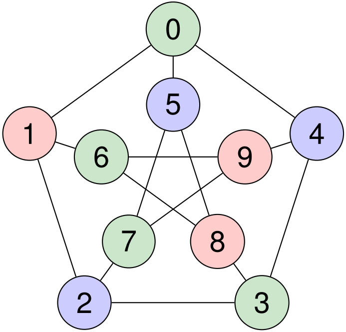
30 clauses

- deux voisins j et j' n'ont pas la même couleur i

$$\neg v_{i,j} \vee \neg v_{i,j'}$$

3×15 clauses

Problème SAT – Exemple 2



Peut-on colorier les nœuds de ce graphe avec seulement 3 couleurs de sorte que deux nœuds voisins n'aient pas la même couleur ?

cf coloring.cnf

- $v_{i,j}$ = le nœud j est colorié en i — 30 variables
- le nœud j a une couleur $\quad v_{1,j} \vee v_{2,j} \vee v_{3,j}$ — 10 clauses
- le nœud j n'a pas à la fois les couleurs i et i'

$$\neg v_{i,j} \vee \neg v_{i',j}$$

30 clauses

- deux voisins j et j' n'ont pas la même couleur i

$$\neg v_{i,j} \vee \neg v_{i,j'}$$

3×15 clauses

Algorithme DPLL (1)

Algo. dû à DAVIS, PUTNAM, LOGEMANN et LOVELAND (1962)

1. si une clause C est unitaire (de taille 1), la rendre vraie

$$C = x \quad \leadsto \quad I(x) = 1$$
$$C = \neg x \quad \leadsto \quad I(x) = 0$$

2. détecter les littéraux purs

si $\neg x$ n'apparaît pas $\leadsto$ $I(x) = 1$

si x n'apparaît pas $\leadsto$ $I(x) = 0$

3. sinon, choisir la valeur d'une variable

$\leadsto$ backtracking en cas d'échec   essayer l'autre valeur

Algorithme DPLL (2)

Propagation des choix :

Si $I(x) = 1$:

- supprimer les clauses avec x
- supprimer les $\neg x$ des clauses

$$\top \vee x \equiv \top \quad + \quad \bot \vee x \equiv x$$

Algorithme DPLL (2)

Propagation des choix :

Si $I(x) = 1$:

- supprimer les clauses avec x
- supprimer les $\neg x$ des clauses

Si $I(x) = 0$:

- supprimer les clauses avec $\neg x$
- supprimer les x des clauses

$$\top \vee x \equiv \top \quad + \quad \bot \vee x \equiv x$$

Algorithme DPLL (2)

Propagation des choix :

Si $I(x) = 1$:

- supprimer les clauses avec x
- supprimer les $\neg x$ des clauses

Si $I(x) = 0$:

- supprimer les clauses avec $\neg x$
- supprimer les x des clauses

$$\top \vee x \equiv \top \quad + \quad \bot \vee x \equiv x$$

Cas d'arrêt :

1. aucune clause restante $\Rightarrow$ I satisfait F
2. apparition d'une clause vide $\Rightarrow$ interprétation courante non valide

$$\text{clause vide} = \bot \quad + \quad \bot \wedge x = \bot$$

Algorithme DPLL – Exemple (1)

On considère les 14 clauses suivantes :

$x_1 \lor \neg x_2 \lor y_1 \lor \neg y_2 \lor \neg z_2 \lor \neg z_4$

$x_2 \lor y_1$

$x_2 \lor y_1 \lor y_2 \lor z_1 \lor z_4$

$x_2 \lor \neg y_2 \lor z_1 \lor \neg z_2$

$x_2 \lor \neg y_1 \lor z_3 \lor \neg z_4$

$x_2 \lor \neg y_2 \lor z_2 \lor \neg z_3$

$\neg x_2 \lor \neg y_1$

$\neg x_2 \lor \neg y_1 \lor \neg y_2$

$\neg x_2 \lor y_1 \lor y_2$

$\neg x_2 \lor \neg y_2 \lor z_1$

$\neg x_2 \lor \neg z_1 \lor z_2$

$\neg z_3 \lor \neg z_4$

$z_3 \lor z_4$

$\neg z_3 \lor z_4$

Algorithme DPLL – Exemple (1)

On considère les 14 clauses suivantes :

$x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg z_2 \vee \neg z_4$ clause unitaire ?

$x_2 \vee y_1$

$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg x_2 \vee \neg y_1$

$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$

$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$

$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$

$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

Algorithme DPLL – Exemple (1)

On considère les 14 clauses suivantes :

$x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg z_2 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee y_1$
$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$
$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$
$\neg x_2 \vee \neg y_1$
$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$
$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$
$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$
$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ?

$\rightsquigarrow$ non

littéral pur ?

Algorithme DPLL – Exemple (1)

On considère les 14 clauses suivantes :

$x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg z_2 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee y_1$
$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$
$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$
$\neg x_2 \vee \neg y_1$
$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$
$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$
$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$
$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ?

$\rightsquigarrow$ non

littéral pur ?

$\rightsquigarrow x_1$

Algorithme DPLL – Exemple (1)

On considère les 14 clauses suivantes :

$x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg z_2 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee y_1$
$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$
$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$
$\neg x_2 \vee \neg y_1$
$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$
$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$
$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$
$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ?

$\rightsquigarrow$ non

littéral pur ?

$\rightsquigarrow x_1$

- On pose $I(x_1) = 1$

Algorithme DPLL – Exemple (1)

On considère les 14 clauses suivantes :

$\cancel{x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg z_2 \vee \neg z_4}$
$x_2 \vee y_1$
$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$
$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$
$\neg x_2 \vee \neg y_1$
$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$
$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$
$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$
$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ?

$\rightsquigarrow$ non

littéral pur ?

$\rightsquigarrow$ x_1

- On pose $I(x_1) = 1$
- On supprime la 1re clause

Algorithme DPLL – Exemple (2)

Il reste encore 13 clauses :

$I(x_1) = 1$

$x_2 \vee y_1$

$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg x_2 \vee \neg y_1$

$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$

$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$

$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$

$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

Algorithme DPLL – Exemple (2)

Il reste encore 13 clauses :

$I(x_1) = 1$

$x_2 \vee y_1$
$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$
$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$
$\neg x_2 \vee \neg y_1$
$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$
$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$
$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$
$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ?

Algorithme DPLL – Exemple (2)

Il reste encore 13 clauses :

$I(x_1) = 1$

$x_2 \vee y_1$

$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg x_2 \vee \neg y_1$

$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$

$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$

$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$

$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ?

$\rightsquigarrow$ non

littéral pur ?

Algorithme DPLL – Exemple (2)

Il reste encore 13 clauses :

$I(x_1) = 1$

$x_2 \vee y_1$

$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg x_2 \vee \neg y_1$

$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$

$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$

$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$

$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ?

$\leadsto$ non

littéral pur ?

$\leadsto$ non

Il reste encore 13 clauses :

$I(x_1) = 1$

$x_2 \vee y_1$

$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg x_2 \vee \neg y_1$

$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$

$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$

$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$

$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ?

$\rightsquigarrow$ non

littéral pur ?

$\rightsquigarrow$ non

- On essaie $I(x_2) = 0$

Algorithme DPLL – Exemple (2)

Il reste encore 13 clauses :

$I(x_1) = 1$

$x_2 \vee y_1$

$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$

$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\cancel{\neg x_2 \vee \neg y_1}$

$\cancel{\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2}$

$\cancel{\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2}$

$\cancel{\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1}$

$\cancel{\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2}$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ?

$\rightsquigarrow$ non

littéral pur ?

$\rightsquigarrow$ non

- On essaie $I(x_2) = 0$
- On supprime les clauses 6 à 9

Il reste encore 13 clauses :

$\cancel{x_2 \vee} y_1$

$\cancel{x_2 \vee} y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$

$\cancel{x_2 \vee} \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$\cancel{x_2 \vee} \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$

$\cancel{x_2 \vee} \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\cancel{\neg x_2 \vee \neg y_1}$

$\cancel{\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2}$

$\cancel{\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2}$

$\cancel{\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1}$

$\cancel{\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2}$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

$I(x_1) = 1$

clause unitaire ?

$\rightsquigarrow$ non

littéral pur ?

$\rightsquigarrow$ non

- On essaie $I(x_2) = 0$
- On supprime les clauses 6 à 9
- On supprime x_2 dans les autres clauses

Algorithme DPLL – Exemple (3)

Il reste encore 8 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?

y_1

$y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$

$\neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$\neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$

$\neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

Il reste encore 8 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?

y_1
$y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$
$\neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$
$\neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$
$\neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_1) = 1$

Algorithme DPLL – Exemple (3)

Il reste encore 8 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?

$\cancel{y_1}$

$\cancel{y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4}$

$\neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$\cancel{\neg y_1 \vee} z_3 \vee \neg z_4$

$\neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_1) = 1$
- On propage

Algorithme DPLL – Exemple (3)

Il reste encore 8 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?

$\cancel{y_1}$

$\cancel{y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4}$

$\neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$\cancel{\neg y_1 \vee} z_3 \vee \neg z_4$

$\neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_1) = 1$
- On propage

Il reste encore 6 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?, $I(y_1) = 1$

$\neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$z_3 \vee \neg z_4$

$\neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

Algorithme DPLL – Exemple (3)

Il reste encore 8 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?

$\cancel{y_1}$

$\cancel{y_1 \lor y_2 \lor z_1 \lor z_4}$

$\neg y_2 \lor z_1 \lor \neg z_2$

$\cancel{\neg y_1 \lor} z_3 \lor \neg z_4$

$\neg y_2 \lor z_2 \lor \neg z_3$

$\neg z_3 \lor \neg z_4$

$z_3 \lor z_4$

$\neg z_3 \lor z_4$

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_1) = 1$
- On propage

Il reste encore 6 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?, $I(y_1) = 1$

$\neg y_2 \lor z_1 \lor \neg z_2$

$z_3 \lor \neg z_4$

$\neg y_2 \lor z_2 \lor \neg z_3$

$\neg z_3 \lor \neg z_4$

$z_3 \lor z_4$

$\neg z_3 \lor z_4$

clause unitaire ? non

littéral pur ? $\neg y_2$ et z_1

Algorithme DPLL – Exemple (3)

Il reste encore 8 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?

$\cancel{y_1}$

$\cancel{y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4}$

$\neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$

$\cancel{\neg y_1 \vee} z_3 \vee \neg z_4$

$\neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_1) = 1$
- On propage

Il reste encore 6 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?, $I(y_1) = 1$

$\cancel{\neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2}$

$z_3 \vee \neg z_4$

$\cancel{\neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3}$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? non

littéral pur ? $\neg y_2$ et z_1

- On pose $I(y_2) = 0$
- On propage

Algorithme DPLL – Exemple (4)

Il reste encore 4 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0\,?$, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$

$z_3 \vee \neg z_4$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

Algorithme DPLL – Exemple (4)

Il reste encore 4 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0\,?$, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$

$\cancel{z_3 \lor} \neg z_4$

$\cancel{\neg z_3 \lor \neg z_4}$

$\cancel{z_3 \lor} z_4$

$\cancel{\neg z_3 \lor z_4}$

clause unitaire ? non

littéral pur ? non

- On essaie $I(z_3) = 0$
- On propage

Algorithme DPLL – Exemple (4)

Il reste encore 4 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$

$\cancel{z_3 \vee} \neg z_4$

$\cancel{\neg z_3 \vee \neg z_4}$

$\cancel{z_3 \vee} z_4$

$\cancel{\neg z_3 \vee z_4}$

clause unitaire ? non

littéral pur ? non

- On essaie $I(z_3) = 0$
- On propage

Il reste encore 2 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$, $I(z_3) = 0$?

$\neg z_4$

z_4

Algorithme DPLL – Exemple (4)

Il reste encore 4 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$

$\cancel{z_3 \vee \neg z_4}$

$\cancel{\neg z_3 \vee \neg z_4}$

$\cancel{z_3 \vee z_4}$

$\cancel{\neg z_3 \vee z_4}$

clause unitaire ? non

littéral pur ? non

- On essaie $I(z_3) = 0$
- On propage

Il reste encore 2 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0$?, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$, $I(z_3) = 0$?

$\neg z_4$

z_4

Si on essaie $I(z_4) = 0$, la clause 2 devient $\perp$

Si on essaie $I(z_4) = 1$, la clause 1 devient $\perp$

$\rightsquigarrow$ backtrack $I(z_3)$ passe à 1

Algorithme DPLL – Exemple (5)

Il reste encore 4 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0\,?$, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$

$z_3 \vee \neg z_4$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

On essaie maintenant $I(z_3) = 1$

Algorithme DPLL – Exemple (5)

Il reste encore 4 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0\,?$, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$

$\cancel{z_3 \vee \neg z_4}$

$\cancel{\neg z_3 \vee} \neg z_4$

$\cancel{z_3 \vee z_4}$

$\cancel{\neg z_3 \vee} z_4$

On essaie maintenant $I(z_3) = 1$

- On propage

Algorithme DPLL – Exemple (5)

Il reste encore 4 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0\,?$, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$

$\cancel{z_3 \vee \neg z_4}$

$\cancel{\neg z_3 \vee}\ \neg z_4$

$\cancel{z_3 \vee z_4}$

$\cancel{\neg z_3 \vee}\ z_4$

On essaie maintenant $I(z_3) = 1$

- On propage

Il reste encore 2 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0\,?$, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$, $I(z_3) = 1$

$\neg z_4$

z_4

Algorithme DPLL – Exemple (5)

Il reste encore 4 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0\,?$, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$

$\cancel{z_3 \vee \neg z_4}$

$\cancel{\neg z_3 \vee} \neg z_4$

$\cancel{z_3 \vee z_4}$

$\cancel{\neg z_3 \vee} z_4$

On essaie maintenant $I(z_3) = 1$

- On propage

Il reste encore 2 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 0\,?$, $I(y_1) = 1$, $I(y_2) = 0$, $I(z_3) = 1$

$\neg z_4$

z_4

Si on essaie $I(z_4) = 0$, la clause 2 devient $\perp$

Si on essaie $I(z_4) = 1$, la clause 1 devient $\perp$

$\rightsquigarrow$ backtrack $I(x_2)$ passe à 1

Algorithme DPLL – Exemple (6)

Il reste encore 13 clauses :

$I(x_1) = 1$

$x_2 \vee y_1$
$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$
$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$
$\neg x_2 \vee \neg y_1$
$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$
$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$
$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$
$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

On essaie maintenant $I(x_2) = 1$

Algorithme DPLL – Exemple (6)

Il reste encore 13 clauses :

$I(x_1) = 1$

$\cancel{x_2 \vee y_1}$

$\cancel{x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4}$

$\cancel{x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2}$

$\cancel{x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4}$

$\cancel{x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3}$

$\cancel{\neg x_2 \vee} \neg y_1$

$\cancel{\neg x_2 \vee} \neg y_1 \vee \neg y_2$

$\cancel{\neg x_2 \vee} y_1 \vee y_2$

$\cancel{\neg x_2 \vee} \neg y_2 \vee z_1$

$\cancel{\neg x_2 \vee} \neg z_1 \vee z_2$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

On essaie maintenant $I(x_2) = 1$

- On propage

Algorithme DPLL – Exemple (7)

Il reste encore 8 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$

$\neg y_1$

$\neg y_1 \vee \neg y_2$

$y_1 \vee y_2$

$\neg y_2 \vee z_1$

$\neg z_1 \vee z_2$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? oui

Algorithme DPLL – Exemple (7)

Il reste encore 8 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$

$\cancel{\neg y_1}$

$\cancel{\neg y_1 \vee \neg y_2}$

$\cancel{y_1 \vee} \; y_2$

$\neg y_2 \vee z_1$

$\neg z_1 \vee z_2$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_1) = 0$ et on propage

clause unitaire ? oui

Algorithme DPLL – Exemple (7)

Il reste encore 8 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$

$\cancel{\neg y_1}$

$\cancel{\neg y_1 \vee \neg y_2}$

$\cancel{y_1 \vee y_2}$

$\cancel{\neg y_2 \vee z_1}$

$\neg z_1 \vee z_2$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$

$z_3 \vee z_4$

$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_1) = 0$ et on propage

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_2) = 1$ et on propage

clause unitaire ? oui

Il reste encore 8 clauses :

$I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$, $I(z_1) = 1$

$\cancel{\neg y_1}$
$\cancel{\neg y_1 \vee \neg y_2}$
$\cancel{y_1 \vee y_2}$
$\cancel{\neg y_2 \vee z_1}$
$\cancel{\neg z_1 \vee} z_2$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_1) = 0$ et on propage

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_2) = 1$ et on propage

clause unitaire ? oui

- On pose $I(z_1) = 1$ et on propage

clause unitaire ? oui

Algorithme DPLL – Exemple (7)

Il reste encore 8 clauses :

$I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$, $I(z_1) = 1$, $I(z_2) = 1$

$\cancel{\neg y_1}$
$\cancel{\neg y_1 \vee \neg y_2}$
$\cancel{y_1 \vee y_2}$
$\cancel{\neg y_2 \vee z_1}$
$\cancel{\neg z_1 \vee z_2}$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_1) = 0$ et on propage

clause unitaire ? oui

- On pose $I(y_2) = 1$ et on propage

clause unitaire ? oui

- On pose $I(z_1) = 1$ et on propage

clause unitaire ? oui

- On pose $I(z_2) = 1$ et on propage

Algorithme DPLL – Exemple (8)

Il reste encore 3 clauses :

$I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$, $I(z_1) = 1$, $I(z_2) = 1$

$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

clause unitaire ? non

littéral pur ? non

Algorithme DPLL – Exemple (8)

Il reste encore 3 clauses :

$I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$, $I(z_1) = 1$, $I(z_2) = 1$

$\cancel{\neg z_3 \neg z_4}$

$\cancel{z_3 \vee} z_4$

$\cancel{\neg z_3 \vee z_4}$

clause unitaire ? non

littéral pur ? non

- On essaie $I(z_3) = 0$
- On propage

Algorithme DPLL – Exemple (8)

Il reste encore 3 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$, $I(z_1) = 1$, $I(z_2) = 1$

$\cancel{\neg z_3 \neg z_4}$ clause unitaire ? non

$\cancel{z_3 \vee} z_4$ littéral pur ? non

$\cancel{\neg z_3 \vee z_4}$

- On essaie $I(z_3) = 0$
- On propage

Il reste encore 1 clause : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$, $I(z_1) = 1$, $I(z_2) = 1$
$I(z_3) = 0$?

z_4 clause unitaire ? oui

Algorithme DPLL – Exemple (8)

Il reste encore 3 clauses : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$, $I(z_1) = 1$, $I(z_2) = 1$

$\cancel{\neg z_3 \neg z_4}$ clause unitaire ? non

$\cancel{z_3 \vee} z_4$ littéral pur ? non

$\cancel{\neg z_3 \vee z_4}$

- On essaie $I(z_3) = 0$
- On propage

Il reste encore 1 clause : $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$, $I(z_1) = 1$, $I(z_2) = 1$
$I(z_3) = 0$?

$\cancel{z_4}$ clause unitaire ? oui

- On pose $I(z_4) = 1$
- On propage

Algorithme DPLL – Exemple (9)

Il reste 0 clause $\rightsquigarrow$ problème satisfiable

$x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg z_2 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee y_1$
$x_2 \vee y_1 \vee y_2 \vee z_1 \vee z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1 \vee \neg z_2$
$x_2 \vee \neg y_1 \vee z_3 \vee \neg z_4$
$x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2 \vee \neg z_3$
$\neg x_2 \vee \neg y_1$
$\neg x_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2$
$\neg x_2 \vee y_1 \vee y_2$
$\neg x_2 \vee \neg y_2 \vee z_1$
$\neg x_2 \vee \neg z_1 \vee z_2$
$\neg z_3 \vee \neg z_4$
$z_3 \vee z_4$
$\neg z_3 \vee z_4$

Interprétation valide =

$I(x_1) = 1$
$I(x_2) = 1$
$I(y_1) = 0$
$I(y_2) = 1$
$I(z_1) = 1$
$I(z_2) = 1$
$I(z_3) = 0$
$I(z_4) = 1$

Plan

Plan

Séquent

Un séquent est un couple noté $\Gamma \vdash F$, où : $\vdash$ se lit « thèse »

- Γ est un ensemble de formules,
- F une formule.

Γ = contexte du séquent hypothèses

F = conclusion du séquent formule à prouver

Séquent =

- purement syntaxique
- élément de base d'une preuve en déduction naturelle

Séquents prouvables (1)

L'ensemble des séquents prouvables est défini inductivement par :

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (ax)$$

Séquents prouvables (1)

L'ensemble des séquents prouvables est défini inductivement par :

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (ax)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

Séquents prouvables (1)

L'ensemble des séquents prouvables est défini inductivement par :

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (ax)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

Séquents prouvables (1)

L'ensemble des séquents prouvables est défini inductivement par :

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

Séquents prouvables (2)

Chaque règle peut :

- être appliquée en remplaçant Γ, F, G, H selon le contexte
- se lire de haut en bas — vérification de preuve
  - i = introduction
  - e = éliminiation

Séquents prouvables (2)

Chaque règle peut :

- être appliquée en remplaçant Γ, F, G, H selon le contexte
- se lire de haut en bas — vérification de preuve
  - i = introduction
  - e = éliminiation
- se lire de bas en haut — construction de preuve
  - i = incinération
  - e = exploitation

Lecture des règles (1)

Pour prouver F à partir de Γ, F il n'y a rien à faire

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\text{(ax)}$$

On peut toujours déduire F à partir de Γ, F

Lecture des règles (1)

Pour prouver F à partir de Γ, F il n'y a rien à faire

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\text{ax})$$

On peut toujours déduire F à partir de Γ, F

Pour prouver $F \Rightarrow G$, on suppose F et on montre G

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i)$$

Si G est vraie sous l'hypothèse F, alors on a le théorème $F \Rightarrow G$

Lecture des règles (1)

Pour prouver F à partir de Γ, F il n'y a rien à faire

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\text{ax})$$

On peut toujours déduire F à partir de Γ, F

Pour prouver $F \Rightarrow G$, on suppose F et on montre G

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i)$$

Si G est vraie sous l'hypothèse F, alors on a le théorème $F \Rightarrow G$

Pour prouver G, on prouve le théorème $F \Rightarrow G$ et son hypothèse F

$$\frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

Du théorème $F \Rightarrow G$ et de F, on déduit G

Lecture des règles (2)

Pour prouver $F \wedge G$, il suffit de montrer F et G

$$\dfrac{\Gamma \vdash F \qquad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i)$$

De F et G, on déduit $F \wedge G$

Lecture des règles (2)

Pour prouver $F \wedge G$, il suffit de montrer F et G

$$\frac{\Gamma \vdash F \qquad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i)$$

De F et G, on déduit $F \wedge G$

Pour prouver F, on va montrer $F \wedge G$

$$\frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g)$$

De $F \wedge G$, on déduit F (et G)

Lecture des règles (3)

Pour prouver $\neg F$,
on va supposer F
et montrer que c'est
absurde

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i)$$

Si F est absurde,
on en déduit $\neg F$

Lecture des règles (3)

Pour prouver $\neg F$, on va supposer F et montrer que c'est absurde

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i)$$

Si F est absurde, on en déduit $\neg F$

Pour montrer une contradiction, on montre $\neg F$ et F

$$\frac{\Gamma \vdash \neg F \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$$

De $\neg F$ et F, on arrive à une contradiction

Lecture des règles (3)

Pour prouver $\neg F$, on va supposer F et montrer que c'est absurde

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i)$$

Si F est absurde, on en déduit $\neg F$

Pour montrer une contradiction, on montre $\neg F$ et F

$$\frac{\Gamma \vdash \neg F \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$$

De $\neg F$ et F, on arrive à une contradiction

Pour prouver F, on va supposer $\neg F$ et montrer que c'est absurde

$$\frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

Si $\neg F$ est absurde, on en déduit F

Lecture des règles (4)

Pour prouver $F \lor G$, on va montrer F

$$\dfrac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \lor G}\ (\lor_i^g)$$

De F (ou G), on en déduit $F \lor G$

Lecture des règles (4)

Pour prouver $F \vee G$, on va montrer F

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g)$$

De F (ou G), on en déduit $F \vee G$

Pour prouver H, on raisonne par cas sur $F \vee G$.

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

Si on a $F \vee G$, qu'on peut déduire H de F, et H de G, alors on en déduit H (dans tous les cas)

Plan

1. Formules en logique propositionnelle
   - Syntaxe et sémantique
   - Tables de vérité
   - Preuves sémantiques
2. Formes normales conjonctives et problèmes SAT
   - Formes normales conjonctives
   - Problèmes SAT
3. Déduction naturelle
   - Séquents et règles de la déduction naturelle
   - Preuve en déduction naturelle
4. Bilan

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\frac{}{\vdash p \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\frac{}{\vdash p \boxed{\Rightarrow} (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\dfrac{\dfrac{}{p \vdash (p \Rightarrow q) \;\Rightarrow\; q}}{\vdash p \;\boxed{\Rightarrow}\; (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\;(\Rightarrow_i)$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\dfrac{\dfrac{}{p \vdash (p \Rightarrow q) \ \Rightarrow \ q}}{\vdash p \ \Rightarrow \ (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\ (\Rightarrow_i)$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\dfrac{\overline{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\ (\Rightarrow_i)$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,\ p \Rightarrow q\ \vdash q}}{p \vdash (p \Rightarrow q)\ \boxed{\Rightarrow}\ q}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash p\ \Rightarrow\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\ (\Rightarrow_i)$$

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,\ p \Rightarrow q\ \vdash q}}{p \vdash (p \Rightarrow q)\ \Rightarrow\ q}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash p\ \Rightarrow\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\ (\Rightarrow_i)$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{p,\ \boxed{p \Rightarrow q} \vdash q}}{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\ (\Rightarrow_i)$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q} \qquad \dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p}}{p, \boxed{p \Rightarrow q} \vdash q}\,(\Rightarrow_e)}{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\,(\Rightarrow_i)
$$

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q} \qquad \dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p}}{p,\ p \Rightarrow q\ \vdash q}\,(\Rightarrow_e)}{p \vdash (p \Rightarrow q)\ \Rightarrow\ q}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash p\ \Rightarrow\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\,(\Rightarrow_i)
$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q}\,(ax)
  \qquad
  \dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p}
}{
  \dfrac{p,\ p \Rightarrow q\ \vdash q}{
    \dfrac{p \vdash (p \Rightarrow q)\ \Rightarrow\ q}{\vdash p\ \Rightarrow\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\,(\Rightarrow_i)
  }\,(\Rightarrow_i)
}\,(\Rightarrow_e)
$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q}\,(ax)
    \qquad
    \dfrac{}{\color{cyan}{p}, p \Rightarrow q \vdash \color{cyan}{p}}\,\color{cyan}{(ax)}
  }{p,\ p \Rightarrow q\ \vdash q}\,(\Rightarrow_e)
}{
  \dfrac{p \vdash (p \Rightarrow q)\ \Rightarrow\ q}{\vdash p\ \Rightarrow\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\,(\Rightarrow_i)
}\,(\Rightarrow_i)
$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 1

Objectif : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q}\,(ax) \quad \dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p}\,(ax)}{\dfrac{p,\ p \Rightarrow q\ \vdash q}{p \vdash (p \Rightarrow q) \ \Rightarrow \ q}\,(\Rightarrow_i)}\,(\Rightarrow_e)}{\vdash p \ \Rightarrow \ (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\,(\Rightarrow_i)$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$\frac{}{\vdash F}$$

$$F = A \vee \neg A$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg F \quad \vdash \bot}}{\vdash F}\ (\bot_c)$$

$$F = A \vee \neg A$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg F \quad \vdash A} \qquad \dfrac{}{\neg F \quad \vdash \neg A}}{\neg F \quad \vdash \bot}\ (\neg_e)}{\vdash F}\ (\bot_c)$$

$$F = A \vee \neg A$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$
\dfrac{
  \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \vdash \bot}}{\neg F \vdash A}\,(\bot_c)
  \qquad
  \dfrac{}{\neg F \vdash \neg A}
}{
  \dfrac{\neg F \vdash \bot}{\vdash F}\,(\bot_c)
}\,(\neg_e)
$$

$$F = A \vee \neg A$$
$$\Gamma_G = \neg F, \neg A$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma_G \vdash \neg F}
      \qquad
      \dfrac{}{\Gamma_G \vdash F}
    }{\Gamma_G \vdash \bot}\,(\neg_e)
  }{\neg F \vdash A}\,(\bot_c)
  \qquad
  \dfrac{}{\neg F \vdash \neg A}
}{
  \dfrac{\neg F \vdash \bot}{\vdash F}\,(\bot_c)
}\,(\neg_e)
$$

$$F = A \vee \neg A$$
$$\Gamma_G = \neg F, \neg A$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \quad \vdash \neg F}\,(ax) \qquad \dfrac{}{\Gamma_G \quad \vdash F}}{\Gamma_G \quad \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\neg F \quad \vdash A}\,(\bot_c) \qquad \dfrac{}{\neg F \quad \vdash \neg A}}{\neg F \quad \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\vdash F}\,(\bot_c)$$

$$F = A \vee \neg A$$
$$\Gamma_G = \neg F, \neg A$$

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \quad \vdash \neg F}\,(ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \quad \vdash \neg A}}{\Gamma_G \quad \vdash F}\,(\vee_i^d)}{\Gamma_G \quad \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\neg F \quad \vdash A}\,(\bot_c) \qquad \dfrac{}{\neg F \quad \vdash \neg A}}{\dfrac{\neg F \quad \vdash \bot}{\vdash F}\,(\bot_c)}\,(\neg_e)$$

$$F = A \vee \neg A$$
$$\Gamma_G = \neg F, \neg A$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \quad \vdash \neg F}\,(ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \quad \vdash \neg A}\,(ax)}{\Gamma_G \quad \vdash F}\,(\vee_i^d)}{\Gamma_G \quad \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\neg F \quad \vdash A}\,(\bot_c) \qquad \dfrac{}{\neg F \quad \vdash \neg A}}{\dfrac{\neg F \quad \vdash \bot}{\vdash F}\,(\bot_c)}\,(\neg_e)
$$

$$
F = A \vee \neg A
$$
$$
\Gamma_G = \neg F, \neg A
$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma_G \vdash \neg F}\,(ax)
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \vdash \neg A}\,(ax)}{\Gamma_G \vdash F}\,(\vee_i^d)
    }{\Gamma_G \vdash \bot}\,(\neg_e)
  }{\neg F \vdash A}\,(\bot_c)
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{}{\Gamma_D \vdash \bot}
  }{\neg F \vdash \neg A}\,(\neg_i)
}{
  \dfrac{\neg F \vdash \bot}{\vdash F}\,(\bot_c)
}\,(\neg_e)
$$

$$
\begin{aligned}
F &= A \vee \neg A \\
\Gamma_G &= \neg F, \neg A \\
\Gamma_D &= \neg F, A
\end{aligned}
$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma_G \vdash \neg F$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma_G \vdash \neg A$}
\RightLabel{$(\vee_i^d)$}
\UnaryInfC{$\Gamma_G \vdash F$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\Gamma_G \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\bot_c)$}
\UnaryInfC{$\neg F \vdash A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\Gamma_D \vdash \neg F$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\Gamma_D \vdash F$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\Gamma_D \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)$}
\UnaryInfC{$\neg F \vdash \neg A$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\neg F \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\bot_c)$}
\UnaryInfC{$\vdash F$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= A \vee \neg A \\
\Gamma_G &= \neg F, \neg A \\
\Gamma_D &= \neg F, A
\end{aligned}
$$

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma_G \vdash \neg F$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma_G \vdash \neg A$}
\RightLabel{$(\vee_i^d)$}
\UnaryInfC{$\Gamma_G \vdash F$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\Gamma_G \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\bot_c)$}
\UnaryInfC{$\neg F \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma_D \vdash \neg F$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\Gamma_D \vdash F$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\Gamma_D \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)$}
\UnaryInfC{$\neg F \vdash \neg A$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\neg F \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\bot_c)$}
\UnaryInfC{$\vdash F$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= A \vee \neg A \\
\Gamma_G &= \neg F, \neg A \\
\Gamma_D &= \neg F, A
\end{aligned}
$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma_G \vdash \neg F}\,(ax)
      \quad
      \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \vdash \neg A}\,(ax)}{\Gamma_G \vdash F}\,(\vee_i^d)
    }{\Gamma_G \vdash \bot}\,(\neg_e)
  }{\neg F \vdash A}\,(\bot_c)
  \quad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma_D \vdash \neg F}\,(ax)
      \quad
      \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_D \vdash A}\,(ax)}{\Gamma_D \vdash F}\,(\vee_i^g)
    }{\Gamma_D \vdash \bot}\,(\neg_e)
  }{\neg F \vdash \neg A}\,(\neg_i)
}{
  \dfrac{\neg F \vdash \bot}{\vdash F}\,(\bot_c)
}\,(\neg_e)
$$

$$
\begin{aligned}
F &= A \vee \neg A \\
\Gamma_G &= \neg F, \neg A \\
\Gamma_D &= \neg F, A
\end{aligned}
$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\vdash A \vee \neg A$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma_G \vdash \neg F}\,(ax)
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \vdash \neg A}\,(ax)}{\Gamma_G \vdash F}\,(\vee_i^d)
    }{
      \Gamma_G \vdash \bot
    }\,(\neg_e)
  }{
    \neg F \vdash A
  }\,(\bot_c)
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma_D \vdash \neg F}\,(ax)
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_D \vdash A}\,(ax)}{\Gamma_D \vdash F}\,(\vee_i^g)
    }{
      \Gamma_D \vdash \bot
    }\,(\neg_e)
  }{
    \neg F \vdash \neg A
  }\,(\neg_i)
}{
  \dfrac{\neg F \vdash \bot}{\vdash F}\,(\bot_c)
}\,(\neg_e)
$$

$$
F = A \vee \neg A
$$
$$
\Gamma_G = \neg F, \neg A
$$
$$
\Gamma_D = \neg F, A
$$

Preuve en déduction naturelle – Exemple 2

Objectif : démontrer $\Gamma \vdash A \vee \neg A$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma_G, \Gamma \vdash \neg F}\,(ax)
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G, \Gamma \vdash \neg A}\,(ax)}{\Gamma_G, \Gamma \vdash F}\,(\vee_i^d)
}{
\dfrac{\Gamma_G, \Gamma \vdash \bot}{\neg F, \Gamma \vdash A}\,(\bot_c)
}\,(\neg_e)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma_D, \Gamma \vdash \neg F}\,(ax)
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_D, \Gamma \vdash A}\,(ax)}{\Gamma_D, \Gamma \vdash F}\,(\vee_i^g)
}{
\dfrac{\Gamma_D, \Gamma \vdash \bot}{\neg F, \Gamma \vdash \neg A}\,(\neg_i)
}\,(\neg_e)
}{
\dfrac{\neg F, \Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\,(\bot_c)
}\,(\neg_e)
$$

$$
\begin{aligned}
F &= A \vee \neg A \\
\Gamma_G &= \neg F, \neg A \\
\Gamma_D &= \neg F, A
\end{aligned}
$$

Prouvabilité VS Sémantique

Théorème

Si Γ un ensemble fini de formules et F une formule, alors :

- $\Gamma \vdash F$ implique $\Gamma \models F$ correction

correction = tout séquent prouvable est (sémantiquement) correct

$\leadsto$ preuve possible par induction sur les règles

but : montrer que chaque règle est correcte

Prouvabilité VS Sémantique

Théorème

Si Γ un ensemble fini de formules et F une formule, alors :

- $\Gamma \vdash F$ implique $\Gamma \models F$ — correction
- $\Gamma \models F$ implique $\Gamma \vdash F$ — complétude

correction = tout séquent prouvable est (sémantiquement) correct

$\rightsquigarrow$ preuve possible par induction sur les règles

but : montrer que chaque règle est correcte

complétude = tout ce qui peut être montré sémantiquement est aussi prouvable avec un arbre

$\rightsquigarrow$ preuve dure !!!

Règles dérivables

Règle dérivable = règle dont la conclusion peut-être dérivée des prémisses à l'aide des règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (dec)$$

cf exemple 2 précédent

Règles dérivables

Règle dérivable = règle dont la conclusion peut-être dérivée des prémisses à l'aide des règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (dec)$$

cf exemple 2 précédent

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (te) \qquad \left\{ \frac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (dec) \qquad \Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (\vee_e) \right.$$

Règles dérivables

Règle dérivable = règle dont la conclusion peut-être dérivée des prémisses à l'aide des règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (dec)$$

cf exemple 2 précédent

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (te) \qquad \left\{ \frac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (dec) \quad \Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (\vee_e) \right.$$

Plan

Bilan sur la logique propositionnelle

On a vu :

- syntaxe des formules — déf. inductive (ensemble)
- sémantique des formules — déf. inductive (fonction)
- preuves des formules de 4 manières différentes

Bilan sur la logique propositionnelle

On a vu :

- syntaxe des formules — déf. inductive (ensemble)
- sémantique des formules — déf. inductive (fonction)
- preuves des formules de 4 manières différentes

Tables de vérité

✓ simple

✗ inefficace en pratique

Bilan sur la logique propositionnelle

On a vu :

- syntaxe des formules — déf. inductive (ensemble)
- sémantique des formules — déf. inductive (fonction)
- preuves des formules de 4 manières différentes

Tables de vérité	Preuves sémantiques
✓ simple	✓ complet / synthétique
✗ inefficace en pratique	✗ non vérifiable par ordi.

Bilan sur la logique propositionnelle

On a vu :

- syntaxe des formules — déf. inductive (ensemble)
- sémantique des formules — déf. inductive (fonction)
- preuves des formules de 4 manières différentes

Tables de vérité

✓ simple

✗ inefficace en pratique

Preuves sémantiques

✓ complet / synthétique

✗ non vérifiable par ordi.

Preuves via SAT / algo. DPLL

✓ codes existants

✗ pas forcément efficace

Bilan sur la logique propositionnelle

On a vu :

- syntaxe des formules — déf. inductive (ensemble)
- sémantique des formules — déf. inductive (fonction)
- preuves des formules de 4 manières différentes

Tables de vérité

✓ simple

✗ inefficace en pratique

Preuves via SAT / algo. DPLL

✓ codes existants

✗ pas forcément efficace

Preuves sémantiques

✓ complet / synthétique

✗ non vérifiable par ordi.

Déduction naturelle (arbres)

✓ vérifiable par ordi.

✓ preuve compréhensible

✗ pas de code donnant l'arbre