Logique du premier ordre

Christophe Mouilleron

ensIIE

Limites du calcul propositionnel (1)

Comme traduire :

> « Tous les humains sont mortels
> et Socrate est un humain,
> donc Socrate est mortel »

?

Limites du calcul propositionnel (1)

Comme traduire :

> « Tous les humains sont mortels
> et Socrate est un humain,
> donc Socrate est mortel »

?

Solution 1 :

- p = « Tous les humains sont mortels »
- q = « Socrate est un humain »
- r = « Socrate est mortel »
- $(p \wedge q) \Rightarrow r$

Limites du calcul propositionnel (1)

Comme traduire :

> « Tous les humains sont mortels
> et Socrate est un humain,
> donc Socrate est mortel »

?

Solution 1 :

- p = « Tous les humains sont mortels »
- q = « Socrate est un humain »
- r = « Socrate est mortel »
- $(p \wedge q) \Rightarrow r$

Incorrecte : $p \wedge q \Rightarrow r$ n'est pas une tautologie

Limites du calcul propositionnel (2)

Comme traduire :

> « Tous les humains sont mortels
> et Socrate est un humain,
> donc Socrate est mortel »

?

Solution 2 :

- p_1 = « Forest est mortel », p_2 = « Socrate est mortel »,...
- q_1 = « Forest est un humain », q_2 = « Socrate est un humain »,...
- $(\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} p_i) \wedge (\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} q_i) \Rightarrow p_2$

Limites du calcul propositionnel (2)

Comme traduire :

« Tous les humains sont mortels
et Socrate est un humain,
donc Socrate est mortel »

?

Solution 2 :

- p_1 = « Forest est mortel », p_2 = « Socrate est mortel »,...
- q_1 = « Forest est un humain », q_2 = « Socrate est un humain »,...
- $(\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} p_i) \wedge (\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} q_i) \Rightarrow p_2$

Pas exploitable : formule de taille infinie

Limites du calcul propositionnel (3)

Comme traduire :

> « Tous les humains sont mortels
> et Socrate est un humain,
> donc Socrate est mortel »

?

Solution 3 : logique du premier ordre

Plan

Plan

Premier ordre – Syntaxe (1)

Un langage $\mathcal{L}$ est la donnée de :

- un ensemble de symboles de fonctions $\mathcal{F}$ munies de leurs arités,
- un ensemble de symboles de relations $\mathcal{R}$ munies de leurs arités.

arité = nb. d'arguments
constante = fonction d'arité 0

Premier ordre – Syntaxe (1)

Un langage $\mathcal{L}$ est la donnée de :

- un ensemble de symboles de fonctions $\mathcal{F}$ munies de leurs arités,
- un ensemble de symboles de relations $\mathcal{R}$ munies de leurs arités.

arité = nb. d'arguments
constante = fonction d'arité 0

Sur notre exemple :

- $\mathcal{F} = \{\mathit{Socrate} : 0\}$
- $\mathcal{R} = \{\mathit{Humain} : 1, \quad \mathit{Mortel} : 1\}$

Premier ordre – Syntaxe (2)

Étant donné un langage $\mathcal{L}$ et un ensemble infini de variables $\mathcal{V}$, on définit l'ensemble $\mathcal{T}$ des termes inductivement par :

(B_1) si $v \in \mathcal{V}$ alors $v \in \mathcal{T}$,

(K_1) si f est un symbole de fonction d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.

Premier ordre – Syntaxe (3)

L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules est défini inductivement par :

(B_1) Si $R \in \mathcal{R}$ est d'arité n et si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $R(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$

(K_1) Si $F \in \mathcal{F}$, alors $\neg F \in \mathcal{F}$

(K_2) Si $F_1 \in \mathcal{F}$ et $F_2 \in \mathcal{F}$ et si $\diamond \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$, alors $F_1 \diamond F_2 \in \mathcal{F}$

(K_3) Si F est une formule et x est une variable, alors $\forall x.\, F \in \mathcal{F}$

(K_4) Si F est une formule et x est une variable, alors $\exists x.\, F \in \mathcal{F}$.

Les quantificateurs

Priorité de $\forall$ et $\exists$ = après $\Rightarrow$ = la + faible

$$\forall x.\quad R\big(f(x,y),\, g(y)\big) \Rightarrow R(x,z)$$

se lit

$$\forall x.\ \Big(R\big(f(x,y),\, g(y)\big) \Rightarrow R(x,z)\Big)$$

Les quantificateurs

Priorité de $\forall$ et $\exists$ = après $\Rightarrow$ = la + faible

$$\forall x.\quad R\big(f(x,y),\, g(y)\big) \Rightarrow R(x,z)$$

se lit

$$\forall x.\ \Big(R\big(f(x,y),\, g(y)\big) \Rightarrow R(x,z)\Big)$$

$\forall$ et $\exists$ sont des quantificateurs. Ils lient (et contraignent) les variables dans leur portée (en dessous d'eux).

$$\forall x.\ R\Big(f(x,y),\, g(y)\Big)$$

Les quantificateurs

Priorité de $\forall$ et $\exists$ = après $\Rightarrow$ = la + faible

$$\forall x.\quad R\big(f(x,y),\, g(y)\big) \Rightarrow R(x,z)$$

se lit

$$\forall x.\ \Big(R\big(f(x,y),\, g(y)\big) \Rightarrow R(x,z)\Big)$$

$\forall$ et $\exists$ sont des quantificateurs. Ils lient (et contraignent) les variables dans leur portée (en dessous d'eux).

$$R(x,z) \wedge \forall x.\ R\Big(f(x,y),\, g(y)\Big)$$

Les quantificateurs

Priorité de ∀ et ∃ = après ⇒ = la + faible

$$\forall x.\quad R\big(f(x,y),\, g(y)\big) \Rightarrow R(x,z)$$

se lit

$$\forall x.\ \Big(R\big(f(x,y),\, g(y)\big) \Rightarrow R(x,z)\Big)$$

∀ et ∃ sont des quantificateurs. Ils lient (et contraignent) les variables dans leur portée (en dessous d'eux).

$$R(x,z) \wedge \forall x.\ R\Big(f(x,y),\, g(y)\Big)$$

Le nom des variables liées n'a pas d'importance en soi.

Plan

Variables libres (1)

La fonction $FV : \mathcal{T} \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$, qui prend un terme t et renvoie l'ensemble des variables dans t, est définie inductivement (sur les termes) par :

(B_1) si $t = x$, alors $FV(t) = \{x\}$

(K_1) si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, alors $FV(t) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n)$.

Variables libres (1)

La fonction $FV : \mathcal{T} \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$, qui prend un terme t et renvoie l'ensemble des variables dans t, est définie inductivement (sur les termes) par :

(B_1) si $t = x$, alors $FV(t) = \{x\}$

(K_1) si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, alors $FV(t) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n)$.

FV = *free variables*

un terme t n'a pas de quantificateur
$\Rightarrow$ aucune variable liée
$\Rightarrow$ toutes les variables de t sont libres dans t

Variables libres (2)

La fonction $FV : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$, qui prend une formule F et renvoie l'ensemble des variables libres dans F, est définie inductivement (sur les formules) par :

- (B_1) Si $F = R(t_1, \dots, t_n)$, alors $FV(F) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n)$
- (K_1) Si $F = \neg F_1$ alors $FV(F) = FV(F_1)$
- (K_2) Si $F = F_1 \diamond F_2$ où $\diamond \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$, alors $FV(F) = FV(F_1) \cup FV(F_2)$
- (K_3) Si $F = \forall x.\, F_1$ alors $FV(F) = FV(F_1) \setminus \{x\}$
- (K_4) Si $F = \exists x.\, F_1$ alors $FV(F) = FV(F_1) \setminus \{x\}$.

Variables libres (2)

La fonction $FV : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$, qui prend une formule F et renvoie l'ensemble des variables libres dans F, est définie inductivement (sur les formules) par :

(B_1) Si $F = R(t_1, \ldots, t_n)$, alors $FV(F) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n)$

(K_1) Si $F = \neg F_1$ alors $FV(F) = FV(F_1)$

(K_2) Si $F = F_1 \diamond F_2$ où $\diamond \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$, alors $FV(F) = FV(F_1) \cup FV(F_2)$

(K_3) Si $F = \forall x.\, F_1$ alors $FV(F) = FV(F_1) \setminus \{x\}$

(K_4) Si $F = \exists x.\, F_1$ alors $FV(F) = FV(F_1) \setminus \{x\}$.

formule close = formule sans variable libre

Définition (α-équivalence)

On dit que deux formules F et G sont α-équivalentes, et on note $F \equiv_\alpha G$, lorsque F et G sont identiques à renommage des variables liées près.

$$\begin{aligned}
R(x, z) \wedge \forall x.\, R(f(x, y), g(y)) \quad &\equiv_\alpha \quad R(x, z) \wedge \forall u.\, R(f(u, y), g(y)) \\
&\not\equiv_\alpha \quad R(u, z) \wedge \forall u.\, R(f(u, y), g(y)) \\
&\not\equiv_\alpha \quad R(x, z) \wedge \forall y.\, R(f(y, y), g(y))
\end{aligned}$$

Substitution (1)

Idée : remplacer dans F toutes les occurrences libres de y par u

F est une formule
y est une variable
u est un terme quelconque

Sur les termes, la substitution de y par u dans t, notée $t[y := u]$, est définie inductivement par :

(B_1) Si $t = x$, alors $t[y := u] = \begin{cases} u & \text{si } x = y \\ x & \text{sinon} \end{cases}$

(K_1) Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ alors $t[y := u] = f(\, t_1[y := u], \ldots, \, t_n[y := u]\,)$

Substitution (2)

Sur les formules, la substitution de y par u dans F, notée $F[y := u]$, est définie inductivement par :

(B_1) Si $F = R(t_1, \dots, t_n)$,
alors $F[y := u] = R(\, t_1[y := u]\, , \dots ,\, t_n[y := u]\,)$

(K_1) Si $F = \neg F_1$, alors $F[y := u] = \neg\, F_1[y := u]$

(K_2) Si $F = F_1 \diamond F_2$ où $\diamond \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$,
alors $F[y := u] = F_1[y := u] \diamond F_2[y := u]$

Substitution (2)

Sur les formules, la substitution de y par u dans F, notée $F[y := u]$, est définie inductivement par :

(B_1) Si $F = R(t_1, \ldots, t_n)$,
alors $F[y := u] = R(\, t_1[y := u]\,, \ldots, \, t_n[y := u]\,)$

(K_1) Si $F = \neg F_1$, alors $F[y := u] = \neg\, F_1[y := u]$

(K_2) Si $F = F_1 \diamond F_2$ où $\diamond \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$,
alors $F[y := u] = F_1[y := u] \diamond F_2[y := u]$

(K_{34}) Si $F = \Diamond x.\, F_1$ où $\Diamond \in \{\forall, \exists\}$,

alors $F[y := u] = \begin{cases} F & \text{si } x = y \\ \Diamond x.\, F_1[y := u] & \text{si } x \neq y \end{cases}$

Substitution (2)

Sur les formules, la substitution de y par u dans F, notée $F[y := u]$, est définie inductivement par :

(B_1) Si $F = R(t_1, \dots, t_n)$,
alors $F[y := u] = R(\, t_1[y := u], \dots, t_n[y := u]\,)$

(K_1) Si $F = \neg F_1$, alors $F[y := u] = \neg\, F_1[y := u]$

(K_2) Si $F = F_1 \diamond F_2$ où $\diamond \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$,
alors $F[y := u] = F_1[y := u] \diamond F_2[y := u]$

(K_{34}) Si $F = \Diamond x.\, F_1$ où $\Diamond \in \{\forall, \exists\}$,

$$\text{alors } F[y := u] = \begin{cases} F & \text{si } x = y \\ \Diamond x.\, F_1[y := u] & \text{si } x \neq y \text{ et } x \notin FV(u) \\ \text{problème} & \text{si } x \neq y \text{ et } x \in FV(u) \end{cases}$$

si besoin, renommer x dans u (α-équivalence)

Plan

Sémantique (1)

Objectif = donner un sens aux formules.

Besoins :

Sémantique (1)

Objectif = donner un sens aux formules.

Besoins :

- interpréter les symboles de fonctions et de prédicats

Sémantique (1)

Objectif = donner un sens aux formules.

Besoins :

- interpréter les symboles de fonctions et de prédicats
- interpréter les quantificateurs

reste déjà traité avec la logique propositionnelle

Interprétation et valuation en logique du premier ordre

Soit $\mathcal{L}$ un langage fixé.

Une interprétation (ou modèle) I est la donnée de :

- un ensemble non vide D appelé domaine
- pour chaque fonction $f \in \mathcal{L}$ d'arité n, une fonction $f_I : D^n \to D$
- pour chaque prédicat $R \in \mathcal{L}$ d'arité n, un prédicat $R_I : D^n \to \mathbb{B}$.

Interprétation et valuation en logique du premier ordre

Soit $\mathcal{L}$ un langage fixé.

Une interprétation (ou modèle) I est la donnée de :

- un ensemble non vide D appelé domaine
- pour chaque fonction $f \in \mathcal{L}$ d'arité n, une fonction $f_I : D^n \to D$
- pour chaque prédicat $R \in \mathcal{L}$ d'arité n, un prédicat $R_I : D^n \to \mathbb{B}$.

Une valuation σ est une fonction de $\mathcal{V}$ dans D.

σ dépend de D, donc de I

Sémantique (2)

L'interprétation d'un terme t dépend de :

- l'interprétation I choisie
- la valuation σ.

On la note $I(\sigma, t)$.

$I(\sigma, \cdot) : \mathcal{T} \to D$

Sémantique (2)

L'interprétation d'un terme t dépend de :

- l'interprétation I choisie
- la valuation σ.

On la note $I(\sigma, t)$.

$I(\sigma, \cdot) : \mathcal{T} \to D$

Elle est définie inductivement par :

(B_1) si $t = x$, alors $I(\sigma, t) = \sigma(x)$

(K_1) si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, alors $I(\sigma, t) = f_I(\, I(\sigma, t_1)\, , \ \ldots\ ,\ I(\sigma, t_n)\,)$

Sémantique (3)

L'interprétation d'une formule F dépend aussi de :

- l'interprétation I choisie
- la valuation σ.

On la note $I(\sigma, F)$.

$I(\sigma, \cdot) : \mathcal{T} \to \mathbb{B}$

Sémantique (3)

L'interprétation d'une formule F dépend aussi de :

- l'interprétation I choisie
- la valuation σ.

On la note $I(\sigma, F)$.

$I(\sigma, \cdot) : \mathcal{T} \to \mathbb{B}$

$I(\sigma, F)$ est défini inductivement par :

(B_1) Si $F = R(t_1, \ldots, t_n)$, alors $I(\sigma, F) = R_I(I(\sigma, t_1), \ldots, I(\sigma, t_n))$

(K_1) Si $F = \neg F_1$, alors $I(\sigma, F) = \dot{\neg}\, I(\sigma, F_1)$

(K_2) Si $F = F_1 \diamond F_2$ où $\diamond \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$, alors $I(\sigma, F) = I(\sigma, F_1) \,\dot{\diamond}\, I(\sigma, F_2)$

...

Sémantique (4)

$I(\sigma, F)$ est défini inductivement par :

...

(K_3) Si $F = \forall x.\, F_1$,

alors $I(\sigma, F) = \begin{cases} 1 \text{ si } I(?, F) = 1 \text{ pour tout } v \in D \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

(K_4) Si $F = \exists x.\, F_1$,

alors $I(\sigma, F) = \begin{cases} 1 \text{ si } I(?, F) = 1 \text{ pour au moins un } v \in D \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Sémantique (4)

Étant donnée une valuation σ, une variable x et $v \in D$,

on définit la valuation $\sigma[x/v]$ par $\begin{cases} \sigma[x/v](x) = v \\ \sigma[x/v](y) = \sigma(y) \text{ si } x \neq y \end{cases}$

$\sigma[x/v] = \sigma$ où on a remplacé la valeur de x par v

$I(\sigma, F)$ est défini inductivement par :

...

(K_3) Si $F = \forall x.\, F_1$,

alors $I(\sigma, F) = \begin{cases} 1 \text{ si } I(\sigma[x/v], F) = 1 \text{ pour tout } v \in D \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

(K_4) Si $F = \exists x.\, F_1$,

alors $I(\sigma, F) = \begin{cases} 1 \text{ si } I(\sigma[x/v], F) = 1 \text{ pour au moins un } v \in D \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Quelques remarques et définitions

- $I(\sigma, F)$ ne dépend que de I et des valeurs des variables libres de F
- Si F est une formule close, alors $I(\sigma, F)$ ne dépend pas de σ

Quelques remarques et définitions

- $I(\sigma, F)$ ne dépend que de I et des valeurs des variables libres de F
- Si F est une formule close, alors $I(\sigma, F)$ ne dépend pas de σ

- Quand $I(\sigma, F) = 1$, on dit que I, σ satisfait F et on note $I, \sigma \models F$

Quelques remarques et définitions

- $I(\sigma, F)$ ne dépend que de I et des valeurs des variables libres de F
- Si F est une formule close, alors $I(\sigma, F)$ ne dépend pas de σ

- Quand $I(\sigma, F) = 1$, on dit que I, σ satisfait F et on note $I, \sigma \models F$
- Si $I(\sigma, F) = 1$ pour tout I et tout σ, on dit que F est valide

Quelques remarques et définitions

- $I(\sigma, F)$ ne dépend que de I et des valeurs des variables libres de F
- Si F est une formule close, alors $I(\sigma, F)$ ne dépend pas de σ

- Quand $I(\sigma, F) = 1$, on dit que I, σ satisfait F et on note $I, \sigma \models F$
- Si $I(\sigma, F) = 1$ pour tout I et tout σ, on dit que F est valide

- On note $I, \sigma \models \Gamma$ lorsque $I, \sigma \models F$ pour tout $F \in \Gamma$

Quelques remarques et définitions

- $I(\sigma, F)$ ne dépend que de I et des valeurs des variables libres de F
- Si F est une formule close, alors $I(\sigma, F)$ ne dépend pas de σ

- Quand $I(\sigma, F) = 1$, on dit que I, σ satisfait F et on note $I, \sigma \models F$
- Si $I(\sigma, F) = 1$ pour tout I et tout σ, on dit que F est valide

- On note $I, \sigma \models \Gamma$ lorsque $I, \sigma \models F$ pour tout $F \in \Gamma$
- S'il n'y a pas de I, σ tel que $I, \sigma \models \Gamma$, on dit que Γ est contradictoire

Quelques remarques et définitions

- $I(\sigma, F)$ ne dépend que de I et des valeurs des variables libres de F
- Si F est une formule close, alors $I(\sigma, F)$ ne dépend pas de σ

- Quand $I(\sigma, F) = 1$, on dit que I, σ satisfait F et on note $I, \sigma \models F$
- Si $I(\sigma, F) = 1$ pour tout I et tout σ, on dit que F est valide

- On note $I, \sigma \models \Gamma$ lorsque $I, \sigma \models F$ pour tout $F \in \Gamma$
- S'il n'y a pas de I, σ tel que $I, \sigma \models \Gamma$, on dit que Γ est contradictoire

- On dit que F se déduit sémantiquement de Γ lorsque $I, \sigma \models \Gamma$ implique $I(\sigma, F) = 1$ $\qquad \Sigma \models F$

Quelques remarques et définitions

- $I(\sigma, F)$ ne dépend que de I et des valeurs des variables libres de F
- Si F est une formule close, alors $I(\sigma, F)$ ne dépend pas de σ

- Quand $I(\sigma, F) = 1$, on dit que I, σ satisfait F et on note $I, \sigma \models F$
- Si $I(\sigma, F) = 1$ pour tout I et tout σ, on dit que F est valide

- On note $I, \sigma \models \Gamma$ lorsque $I, \sigma \models F$ pour tout $F \in \Gamma$
- S'il n'y a pas de I, σ tel que $I, \sigma \models \Gamma$, on dit que Γ est contradictoire

- On dit que F se déduit sémantiquement de Γ lorsque $I, \sigma \models \Gamma$ implique $I(\sigma, F) = 1$ $\quad \Sigma \models F$
- On dit que F et G sont sémantiquement équivalentes lorsque $\{F\} \models G$ et $\{G\} \models F$. $\quad F \equiv G$

Équivalences classiques

Celles de la logique propositionnelle

$$\forall x.\, \forall y.\, F \equiv \forall y.\, \forall x.\, F$$
$$\exists x.\, \exists y.\, F \equiv \exists y.\, \exists x.\, F$$

Équivalences classiques

Celles de la logique propositionnelle

$$\forall x.\, \forall y.\, F \equiv \forall y.\, \forall x.\, F$$
$$\exists x.\, \exists y.\, F \equiv \exists y.\, \exists x.\, F$$

$$\neg \forall x.\, F \equiv \exists x.\, \neg F$$
$$\neg \exists x.\, F \equiv \forall x.\, \neg F$$

Équivalences classiques

Celles de la logique propositionnelle

$$\forall x.\, \forall y.\, F \equiv \forall y.\, \forall x.\, F$$
$$\exists x.\, \exists y.\, F \equiv \exists y.\, \exists x.\, F$$

$$\neg \forall x.\, F \equiv \exists x.\, \neg F$$
$$\neg \exists x.\, F \equiv \forall x.\, \neg F$$

$$(\forall x.\, F_1) \wedge F_2 \equiv \forall x.\, F_1 \wedge F_2 \quad \text{si } x \notin FV(F_2)$$
$$(\exists x.\, F_1) \wedge F_2 \equiv \exists x.\, F_1 \wedge F_2 \quad \text{si } x \notin FV(F_2)$$

Équivalences classiques

Celles de la logique propositionnelle

$$\forall x.\, \forall y.\, F \equiv \forall y.\, \forall x.\, F$$
$$\exists x.\, \exists y.\, F \equiv \exists y.\, \exists x.\, F$$

$$\neg\forall x.\, F \equiv \exists x.\, \neg F$$
$$\neg\exists x.\, F \equiv \forall x.\, \neg F$$

$$(\forall x.\, F_1) \wedge F_2 \equiv \forall x.\, F_1 \wedge F_2 \qquad \text{si } x \notin FV(F_2)$$
$$(\exists x.\, F_1) \wedge F_2 \equiv \exists x.\, F_1 \wedge F_2 \qquad \text{si } x \notin FV(F_2)$$

$$(\forall x.\, F_1) \vee F_2 \equiv \forall x.\, F_1 \vee F_2 \qquad \text{si } x \notin FV(F_2)$$
$$(\exists x.\, F_1) \vee F_2 \equiv \exists x.\, F_1 \vee F_2 \qquad \text{si } x \notin FV(F_2)$$

Plan

Plan

Séquents prouvables (3)

On repart des séquents $\Gamma \vdash F$ vus en logique propositionnelle :

- F peut désormais être une formule de logique du premier ordre
- on garde les 13 règles définissant les séquents prouvables
- on ajoute quatre nouvelles règles

Séquents prouvables (3)

On repart des séquents $\Gamma \vdash F$ vus en logique propositionnelle :

- F peut désormais être une formule de logique du premier ordre
- on garde les 13 règles définissant les séquents prouvables
- on ajoute quatre nouvelles règles

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \text{x non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x.\, F}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.\, F}{\Gamma \vdash F[x := t]}\ (\forall_e)$$

Séquents prouvables (3)

On repart des séquents $\Gamma \vdash F$ vus en logique propositionnelle :

- F peut désormais être une formule de logique du premier ordre
- on garde les 13 règles définissant les séquents prouvables
- on ajoute quatre nouvelles règles

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \text{x non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x.\, F}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.\, F}{\Gamma \vdash F[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x.\, F}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.\, F \quad \Gamma, F \vdash G \quad x \text{ non libre dans } \Gamma, \text{ni dans } G}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$$

Lecture des règles (5)

Pour prouver $\forall x.\, F$, on fixe un x quelconque et on démontre F

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x.\, F}\,(\forall_i)$$

Si F est vraie pour un x quelconque, alors on en déduit $\forall x. F$

Lecture des règles (5)

Pour prouver $\forall x.\, F$, on fixe un x quelconque et on démontre F

$$\dfrac{\Gamma \vdash F \qquad \text{x non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x.\, F}\ (\forall_i)$$

Si F est vraie pour un x quelconque, alors on en déduit $\forall x.F$

Pour prouver qu'une propriété F est vraie pour un certain t, il suffit de montrer que F est vraie pour tout x

$$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x.\, F}{\Gamma \vdash F[x := t]}\ (\forall_e)$$

Si $\forall x.\, F$ est vraie, alors cela reste vrai si on remplace x par un t quelconque

Lecture des règles (6)

Pour prouver $\exists x.\, F$, il suffit de fournir une valeur t pour laquelle F est vraie

$$\frac{\Gamma \vdash F[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x.\, F}\ (\exists_i)$$

Si F est vraie pour la valeur t, alors on a bien $\exists x.\, F$

Lecture des règles (6)

Pour prouver $\exists x.\, F$, il suffit de fournir une valeur t pour laquelle F est vraie

$$\frac{\Gamma \vdash F[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x.\, F}\ (\exists_i)$$

Si F est vraie pour la valeur t, alors on a bien $\exists x.\, F$

Pour montrer G, on peut montrer que F est vraie pour un certain x quelconque et utiliser F.

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.\, F \qquad \Gamma, F \vdash G \qquad \color{red}{x \text{ non libre dans } \Gamma, G}}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$$

S'il existe un x quelconque rendant F vraie, et si F permet de montrer G, alors G est vraie

$\exists_e \longleftrightarrow \vee_e$

Plan

Retour sur l'exemple de Socrate (1)

Comme traduire :

> « Tous les humains sont mortels
> et Socrate est un humain,
> donc Socrate est mortel »

?

Retour sur l'exemple de Socrate (1)

Comme traduire :

> « Tous les humains sont mortels
> et Socrate est un humain,
> donc Socrate est mortel »

?

Solution 3 : logique du premier ordre

- $H(x)$ = « x est humain »
- $M(x)$ = « x est mortel »
- s = « Socrate »

1. $\forall x.\ H(x) \Rightarrow M(x)$
2. $H(s)$

But : $1, 2 \vdash M(s)$?

Retour sur l'exemple de Socrate (2)

But : $\forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \vdash M(s)$?

On pose $\Gamma := \left\{ \forall\, x.\, H(x) \Rightarrow\ M(x),\ H(s) \right\}$

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\Gamma \vdash M(s)}$$

Retour sur l'exemple de Socrate (2)

But : $\forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \vdash M(s)$?

On pose $\Gamma := \left\{ \forall\, x.\, H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \right\}$

$$\frac{}{\Gamma \vdash M(s)}$$

Retour sur l'exemple de Socrate (2)

But : $\forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \vdash M(s)$?

On pose $\Gamma := \left\{ \forall\, x.\, H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \right\}$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash H(s) \Rightarrow M(s)} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash H(s)}}{\Gamma \vdash M(s)}\ (\Rightarrow_e)$$

Retour sur l'exemple de Socrate (2)

But : $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \vdash M(s)$?

On pose $\Gamma := \left\{ \forall x. H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \right\}$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash H(s) \Rightarrow M(s)} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash H(s)}}{\Gamma \vdash M(s)}\ (\Rightarrow_e)$$

Retour sur l'exemple de Socrate (2)

But : $\forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \vdash M(s)$?

On pose $\Gamma := \left\{ \forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \right\}$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x)}}{\Gamma \vdash H(s) \Rightarrow M(s)}\ (\forall_e) \qquad \overline{\Gamma \vdash H(s)}}{\Gamma \vdash M(s)}\ (\Rightarrow_e)$$

Retour sur l'exemple de Socrate (2)

But : $\forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \vdash M(s)$?

On pose $\Gamma := \left\{ \forall\, x.\, H(x) \Rightarrow\ M(x),\ H(s) \right\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x)}\,(ax)}{\Gamma \vdash H(s) \Rightarrow M(s)}\,(\forall_e) \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash H(s)}}{\Gamma \vdash M(s)}\,(\Rightarrow_e)$$

Retour sur l'exemple de Socrate (2)

But : $\forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x),\ H(s) \vdash M(s)$?

On pose $\Gamma := \left\{ \forall\, x.\, H(x) \Rightarrow\ M(x),\ H(s) \right\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.\, H(x) \Rightarrow M(x)}\,(ax)}{\Gamma \vdash H(s) \Rightarrow M(s)}\,(\forall_e) \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash H(s)}\,(ax)}{\Gamma \vdash M(s)}\,(\Rightarrow_e)$$

Prouvabilité VS Sémantique

Théorème

Si F est une formule close, alors :

- $\vdash F$ implique $\models F$ correction

correction = tout séquent prouvable est (sémantiquement) correct

Prouvabilité VS Sémantique

Théorème

Si F est une formule close, alors :

- $\vdash F$ implique $\models F$ — correction
- $\models F$ implique $\vdash F$ — complétude

correction = tout séquent prouvable est (sémantiquement) correct

complétude = tout ce qui peut être montré sémantiquement est aussi prouvable avec un arbre

Prouvabilité VS Sémantique

Théorème

Si F est une formule close, alors :

- $\vdash F$ implique $\models F$ — correction
- $\models F$ implique $\vdash F$ — complétude

correction = tout séquent prouvable est (sémantiquement) correct

complétude = tout ce qui peut être montré sémantiquement est aussi prouvable avec un arbre

$\rightsquigarrow$ preuve très dure !!! — thm. de complétude de Gödel

Prouvabilité VS Sémantique

Théorème

Si F est une formule close, alors :

- $\vdash F$ implique $\models F$ — correction
- $\models F$ implique $\vdash F$ — complétude

correction = tout séquent prouvable est (sémantiquement) correct

complétude = tout ce qui peut être montré sémantiquement est aussi prouvable avec un arbre

$\rightsquigarrow$ preuve très dure !!! — thm. de complétude de Gödel

$\rightsquigarrow$ complétude perdue si on étend trop la logique du 1$^{\text{er}}$ ordre — thm. d'incomplétude de Gödel