Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

TD 1 : Ensembles inductifs, Preuves par induction

Exercice 1 - Palindromes

1.1 Donner une définition inductive de l'ensemble des palindromes (non vides) composés des lettres `a`, `b` et `c`.

Exercice 2 - $a^n b^n$

On définit inductivement l'ensemble X de la façon suivante :
- $\varepsilon \in X$
- si $x \in X$ alors $a \cdot x \cdot b \in X$.

On note $E = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
On rappelle que $\cdot$ est l'opérateur de concaténation de mots, que ε représente le mot vide (composé de 0 lettre), que a^n est le mot composé de n lettres `a` consécutives, et que $a^0 = b^0 = \varepsilon$.

2.1 Montrer que $E \subset X$, c'est-à-dire que tout mot de la forme $a^n b^n$ appartient à X.

2.2 Montrer que $X \subset E$, c'est-à-dire que tout mot $w \in X$ peut s'écrire sous la forme $a^n b^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ correctement choisi.

Exercice 3 -

Pour cet exercice, on considère le sous-ensemble D de $\mathbb{N}^2$ défini inductivement par :

(B) $(n, 0) \in D$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(K) Si $(n, m) \in D$, alors $(n, n + m) \in D$.

3.1 Donner quelques éléments de D.

3.2 Montrer que, pour tous entiers n et m, on a $(n, m) \in D$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $m = kn$.

Exercice 4 - Hauteur et nombre de feuilles d'un arbre binaire

On note T l'ensemble des arbres binaires (sans valeurs) tels que définis dans le cours.

4.1 Donner une définition inductive de la fonction `nb_feuilles` : $T \to \mathbb{N}$.

4.2 Dresser la liste de tous les éléments de T possédant exactement 5 feuilles.

4.3 Donner une définition inductive de la fonction `hauteur` : $T \to \mathbb{N}$.
Pour rappel, la hauteur d'un arbre est la longueur (nombre d'arêtes) du plus long chemin reliant la racine à une feuille.

4.4 Démontrer que, pour tout arbre binaire $t \in T$, on a $\mathrm{nb\_feuilles}(t) \leq 2^{\mathrm{hauteur}(t)}$.

Christophe Mouilleron
christophe.mouilleron@ensiie.fr

Exercice 5 - ***add*** **et** ***double***

On reprend dans cet exercice la définition inductive de Nat vu en cours.

5.1 Montrer que, pour tout $x, y \in \text{Nat}$, on a $S(add(x, y)) = add(x, S(y))$.
note : faire une preuve par induction sur x.

5.2 En déduire que, pour tout $x \in \text{Nat}$, on a $double(x) = add(x, x)$.

5.3 Montrer que, pour tout $x, y \in \text{Nat}$, on a $add(x, y) = add(y, x)$.