

TD 3 : Logique propositionnelle (2)

Exercice 1 - Dédution naturelle et satisfiabilité (adapté de l'examen 2021-2022)

On considère les propositions suivantes :

- Si Pierre rate son tournoi, alors il sera triste.
- S'il fait beau, alors Pierre ira à la piscine.
- Si Pierre ne va pas à la piscine, il sera triste.
- À la piscine, Pierre ne s'entraîne pas.
- Pierre ratera son tournoi s'il ne s'entraîne pas.

1.1 Modéliser l'énoncé à l'aide de formules de la logique propositionnelle.

1.2 Mettre les formules de la question 1 sous forme normale conjonctive, et dérouler l'algorithme DPLL à la main pour montrer que, quoiqu'il arrive, Pierre sera triste.

Exercice 2 - Dédution naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

2.1 $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$

2.2 $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$

2.3 $\vdash (A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

2.4 $\vdash (A \Rightarrow \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \Rightarrow A)$

2.5 $\vdash (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

2.6 $\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B)$

Exercice 3 - Modélisation et preuves

3.1 Formaliser en logique propositionnelle le problème suivant :

- Si Frodon ne va pas au Mordor, Sauron prend le pouvoir.
- Si Sauron prend le pouvoir, Frodon est triste.
- Si Frodon va au Mordor, il ne possède pas l'anneau.
- Si Frodon ne possède pas l'anneau, il est triste.

3.2 Montrer que Frodon est triste en utilisant un raisonnement sémantique.

3.3 En vous inspirant de la preuve précédente, montrer que Frodon est triste utilisant cette fois la déduction naturelle.

Exercice 4 - Quelques règles dérivables

Montrer que les règles suivantes sont dérivables :

4.1 $\overline{\Gamma, A, \neg A \vdash B} \quad (\neg_g)$

4.2 $\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad (\text{contraposée})$