Logique : ENSIIE 1A - contrôle final
- CORRIGÉ
Mardi 11 mai 2010 - Sans documents - Sans calculatrice ni ordinateur
Durée : 1h30

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (**Logique du premier ordre et syntaxe**)

exo sur 4 points

Question 1

1 point Quand dit-on qu'une variable est libre dans une formule ?

Une variable est dite libre dans une formule si elle possède au moins une occurrence libre.

Dans la suite de l'exercice, nous considérons le langage du premier ordre $L = \{R, S, f, a\}$ où R et S désignent deux symboles de relation respectivement unaire et binaire, f désigne un symbole de fonction unaire et a désigne un symbole de constante.
Soit F la formule suivante :

$$(\forall x \exists y R(f(x), f(y))) \wedge ((\forall z R(x, z)) \Rightarrow S(x))$$

Question 2

Les variables x et y sont-elles libres dans la formule F ? Justifiez votre réponse en quelques mots.

1 point

x est libre dans la formule car il existe deux occurrences libres (les deuxième et troisième occurrences quand on lit la formule de gauche à droite. En revanche y est une variable liée car toutes ses occurrences (une seule) sont liées.

Question 3

Transformez la formule F précédente de manière à ce que variables liées et variables libres (éventuelles) ne portent pas le même nom.

1 point

On renomme les variables liées qui ont aussi une occurrence libre. Soit ici le x quantifié universellement. On ne renomme pas les variables libres, on changerait le sens de la formule.

$$(\forall u \exists y R(f(u), f(y))) \wedge ((\forall z R(x, z)) \Rightarrow S(x))$$

Question 4

Donnez la formule $F[x := t]$ (c'est-à-dire la substitution de t à la variable x dans F) quand t est le terme $f(z)$.

1 point

$$(\forall x \exists y R(f(x), f(y))) \wedge ((\forall v R(f(z), v)) \Rightarrow S(f(z)))$$

Cette substitution ne concerne que l'occurrence libre de x. Pour éviter la capture de la variable z (dans le terme $t = f(z)$) par le quantificateur, on commence par renommer dans la formule F la variable liée z en v puis on fait le remplacement. D'où la formule ci-dessus.

Exercice 2 (**Unification**)

exo sur 3 points

Soit f un symbole de fonction d'arité 3. Soit a une constante. x, y et z sont des variables.

Question 5

Les termes $f(x,x,y)$ et $f(f(y,y,z),f(y,y,z),a)$ sont-ils unifiables ? Si oui donnez un mgu (unificateur le plus général), si non, dites pourquoi.
1,5 point

On applique l'algorithme d'unification (à base de règles) :
$\{f(x,x,y) \approx f(f(y,y,z),f(y,y,z),a)\} \rightarrow (decomposition)$
$\{x \approx f(y,y,z), x \approx f(y,y,z), y \approx a\} \rightarrow (elimination\ de\ y)$
$\{x \approx f(a,a,z), x \approx f(a,a,z), y \approx a\} \rightarrow (elimination\ de\ x)$
$\{x \approx f(a,a,z), f(a,a,z) \approx f(a,a,z), y \approx a\} \rightarrow (effacement)$
$\{x \approx f(a,a,z), y \approx a\}$
Les deux termes sont donc unifiables. Le mgu est l'ensemble obtenu à la fin, soit $\{x \approx f(a,a,z), y \approx a\}$.

Question 6

Les termes $f(x,x,y)$ et $f(f(y,y,z),f(y,x,z),a)$ sont-ils unifiables ? Si oui donnez un mgu (unificateur le plus général), si non, dites pourquoi.
1,5 point

On applique l'algorithme d'unification (à base de règles) :
$\{f(x,x,y) \approx f(f(y,y,z),f(y,x,z),a)\} \rightarrow (decomposition)$
$\{x \approx f(y,y,z), \underline{x \approx f(y,x,z)}, y \approx a\} \rightarrow (occurrence - x \in Vars(f(y,x,z)))$
echec
Les deux termes ne sont donc pas unifiables.

Exercice 3 (**Modélisation et méthode de résolution**)

exercice sur 6,5 points

Soit l'énoncé suivant :

1. Les personnes qui ont la grippe A doivent prendre du Tamiflu.
2. Les personnes qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe A.
3. Ceux qui ont une température supérieure à 38° ont de la fièvre.
4. Pierre tousse et a une température supérieure à 38°.
5. Pierre doit prendre du Tamiflu.

Question 7

Modélisez en logique du premier ordre l'énoncé ci-dessus en utilisant les prédicats suivants :

- $grippe(x)$: x a la grippe A.
- $prendre(x,y)$: x doit prendre y.
- $fievre(x)$: x a de la fièvre.
- $tousse(x)$: x tousse.
- $temp(x,t)$: x a la température t.
- $sup(x,y)$: x est supérieur à y.

On utilisera également les constantes 38, $Pierre$ et $Tamiflu$.

2,5 point : 0,5 par phrase

Modélisation en logique du premier ordre :

- (a) $\forall x(grippe(x) \Rightarrow prendre(x, Tamiflu))$
- (b) $\forall x((fievre(x) \wedge tousse(x)) \Rightarrow grippe(x))$
- (c) $\forall x \forall t((temp(x, t) \wedge sup(t, 38)) \Rightarrow fievre(x))$
- (d) $tousse(Pierre) \wedge \exists t(temp(Pierre, t) \wedge sup(t, 38))$
- (e) $prendre(Pierre, Tamiflu)$

Question 8

Prouvez à l'aide de la méthode de résolution que la dernière affirmation est une conséquence logique de l'ensemble des autres affirmations. On rappelle que la méthode de résolution s'applique à un ensemble de formules mises sous forme clausale.

2 points pour une mise en forme clausale correcte et 2 points pour une resolution correcte

Résolution : On va montrer que $a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge \neg e$ est insatisfaisable. Pour cela il faut mettre les formules sous forme clausale.

Première étape mise sous forme prenexe :

- (a) $\forall x(\neg grippe(x) \vee prendre(x, Tamiflu))$
- (b) $\forall x(\neg fievre(x) \vee \neg tousse(x)) \vee grippe(x))$
- (c) $\forall x \forall t(\neg temp(x, t) \vee \neg sup(t, 38) \vee fievre(x))$
- (d) $\exists t(tousse(Pierre) \wedge temp(Pierre, t) \wedge sup(t, 38))$
- ($\neg$ e) $\neg prendre(Pierre, Tamiflu)$

Seule d contient une variable existentielle t, on introduit la constante de Skolem a. On obtient alors la formule :

(d_0) $tousse(Pierre) \wedge temp(Pierre, a) \wedge sup(a, 38)$

Passage à la forme clausale :

- $C1 = \neg grippe(x) \vee prendre(x, Tamiflu)$
- $C2 = \neg fievre(x) \vee \neg tousse(x)) \vee grippe(x)$
- $C3 = \neg temp(x, t) \vee \neg sup(t, 38) \vee fievre(x)$
- $C4 = tousse(Pierre)$
- $C5 = temp(Pierre, a)$
- $C6 = sup(a, 38)$
- $C7 = \neg prendre(Pierre, Tamiflu)$

Résolution :

- $C8 = Res(C7; C1) = \neg grippe(Pierre)$

- $C9 = Res(C8; C2) = \neg fievre(Pierre) \vee \neg tousse(Pierre)$
- $C10 = Res(C9; C3) = \neg tousse(Pierre) \vee \neg temp(Pierre; t) \vee \neg sup(t, 38)$
- $C11 = Res(C10; C4) = \neg temp(Pierre, t) \vee \neg sup(t, 38)$
- $C12 = Res(C11; C5 = \neg sup(a, 38)$
- $C13 = Res(C12; C6) = clause\ vide$

Exercice 4 (**Déduction naturelle**)

3 points : pas d'à peu près !

Question 9

Démontrer en déduction naturelle (en utilisant uniquement les règles rappelées en annexe du sujet) le séquent

$$\vdash ((C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \vee B))$$

Posons $\Gamma = \{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B), C\}$ et $\Gamma_1 = \{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B), C, C \Rightarrow A\}$ et $\Gamma_2 = \{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B), C, C \Rightarrow B\}$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash (C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma_1 \vdash C \Rightarrow A$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma_1 \vdash C$}
\LeftLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma_1 \vdash A$}
\LeftLabel{$\vee_{i_g}$}
\UnaryInfC{$\Gamma_1 \vdash A \vee B$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma_2 \vdash C \Rightarrow B$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma_2 \vdash C$}
\LeftLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma_2 \vdash B$}
\LeftLabel{$\vee_{i_d}$}
\UnaryInfC{$\Gamma_2 \vdash A \vee B$}
\LeftLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma \vdash A \vee B$}
\LeftLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B) \vdash C \Rightarrow (A \vee B)$}
\LeftLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash ((C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \vee B))$}
\end{prooftree}
$$

Au choix : question 10 ou 11

exo sur 3,5 points

Exercice 5 (**Logique du premier ordre et sémantique**)

On considère le langage du premier ordre composé d'un symbole de fonction f d'arité 2, du symbole binaire de l'égalité $=$ (on l'utilisera avec la notation infixe habituelle) et d'un symbole de relation R d'arité 2. Les variables sont notées x, y, z .... Soit l'interprétation suivante :
- le domaine est Z (ensemble des entiers relatifs),
- l'interprétation de f, soit f_I, est l'addition sur Z,
- l'interprétation de R, soit R_I, est la relation $<$,
- l'interprétation de $=$, soit $=_I$, est l'égalité sur Z.

Question 10

Quelle est la valeur de vérité de chacune des 3 formules ci-dessous dans cette interprétation ? Vous justifierez votré réponse en quelques lignes.
On rappelle que la valeur de vérité d'une formule peut dépendre d'une valuation.
- F_1 : $\forall x \exists z (f(z, y) = x)$
- F_2 : $\exists x (R(x, y) \wedge R(y, f(x, x))))$
- F_3 : $\forall x (R(x, y) \Rightarrow R(f(x, x), y))$

- La valeur de vérité de la formule F_1 dépend a priori de la valeur associée à la variable libre y. Soit a la valeur de y (c'est un entier).
  La valeur de vérité de F_1 sera 1 si pour tout entier n il existe un entier m tel que m+a=n. Pour n et a donnés, il suffit de prendre m=n-a. Donc la valeur de vérité de F_1 est 1, quelle que soit la valeur de y.

- De même, ici, y est une variable libre. Soit a sa valeur. On se pose la question de savoir si il existe un entier n tel n <a et a < 2n. La valeur de vérité de F_2 est 1 si a>2, 0 sinon.

- De même, ici, y est une variable libre. Soit a sa valeur. On se pose la question de savoir si pour tout entier n tel n <a alors 2n < a. Ceci est vrai si a < 2. Donc la valeur de vérité de F_3 est 1 si a<2, 0 sinon.

Exercice 6 (**Déduction naturelle**)

Question 11

Soient a un prédicat binaire et m une constante.
Soit F_1 la formule $\forall x \forall y(a(x,m) \Rightarrow a(y,x) \Rightarrow a(y,m))$
Soit F_2 la formule $\forall x \forall y(a(x,y) \Rightarrow a(y,x))$
Soit F_3 la formule $\exists x(a(x,m))$
On note Δ l'ensemble $\{F_1, F_2, F_3\}$
Démontrer en déduction naturelle (en utilisant uniquement les règles rappelées en annexe du sujet) le séquent $\Delta \vdash a(m,m)$

Remarque : si m est interprété comme moi-même, et si $a(x,y)$ est interprété comme x *est l'ami de* y, alors la question consiste à démontrer que si les amis de mes amis sont mes amis, que l'amitié est réciproque et que j'ai un ami alors je suis mon propre ami !

On pose $\Delta_1 = \Delta, a(x_0, m)$.

$$\exists_e\dfrac{ax\dfrac{}{\Delta \vdash \exists x.a(x,m)} \qquad \Rightarrow_e\dfrac{A_1 \qquad \Rightarrow_e\dfrac{2*\forall_e\dfrac{ax\dfrac{}{\Delta_1 \vdash \forall x \forall y(a(x,y) \Rightarrow a(y,x))}}{\Delta_1 \vdash a(x_0,m) \Rightarrow a(m,x_0)} \qquad ax\dfrac{}{\Delta_1 \vdash a(x_0,m)}}{\Delta_1 \vdash a(m,x_0)}}{\Delta_1 \vdash a(m,m)}}{\Delta \vdash a(m,m)}$$

avec A_1 la dérivation ci-dessous

$$\Rightarrow_e\dfrac{2*\forall_e\dfrac{ax\dfrac{}{\Delta_1 \vdash \forall x \forall y(a(x,m) \Rightarrow (a(y,x) \Rightarrow a(y,m)))}}{\Delta_1 \vdash a(x_0,m) \Rightarrow (a(m,x_0) \Rightarrow a(m,m))} \qquad ax\dfrac{}{\Delta_1 \vdash a(x_0,m)}}{\Delta_1 \vdash a(m,x_0) \Rightarrow a(m,m)}$$

Dans l'application de la règle $\exists_e$, le témoin a été nommé x_0 pour qu'il n'y ait aucune confusion.
La notation $2 * \forall_e$ signifie que l'on a appliqué 2 fois de suite la règle $\forall_e$.

On rappelle ci dessous les règles d'inférence de la logique propositionnelle classique en déduction naturelle.

(ax) $\qquad \Delta, A \vdash A$

(aff) $\qquad \dfrac{\Delta \vdash A}{\Delta, B \vdash A}$

$(\Rightarrow_i)$ $\qquad \dfrac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \Rightarrow B}$

$(\Rightarrow_e)$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}$

$(\wedge i)$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}$

$(\wedge e_g)$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}$

$(\wedge e_d)$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}$

$(\vee i_g)$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}$

$(\vee i_d)$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}$

$(\vee e)$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}$

$(\neg i)$ $\qquad \dfrac{\Delta, A \vdash \perp}{\Delta \vdash \neg A}$

$(\neg e)$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash \neg A \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash \perp}$

$(\perp_c)$ $\quad \dfrac{\Delta, \neg A \vdash \perp}{\Delta \vdash A}$