Logique : IAP1 - contrôle continu - groupes 1 et 2
Mardi 16 mars 2010 - Sans documents - durée : 1h30

Les exercices sont indépendants.

1 Logique des propositions

Exercice 1

Prouver les séquents suivants en déduction naturelle :

Question 1

$((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \vdash \neg A$

2 points

$$
D \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{((A \Rightarrow B) \wedge \neg B), A \vdash (A \Rightarrow B) \wedge \neg B}\,ax}{((A \Rightarrow B) \wedge \neg B), A \vdash \neg B}\,\wedge_{eg}}{\dfrac{((A \Rightarrow B) \wedge \neg B), A \vdash \bot}{((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \vdash \neg A}\,\neg_i}\,\neg_e
$$

avec D l'arbre suivant

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{((A \Rightarrow B) \wedge \neg B), A \vdash (A \Rightarrow B) \wedge \neg B}\,ax}{((A \Rightarrow B) \wedge \neg B), A \vdash A \Rightarrow B}\,\wedge_{eg} \qquad \dfrac{}{((A \Rightarrow B) \wedge \neg B), A \vdash A}\,ax}{((A \Rightarrow B) \wedge \neg B), A \vdash B}\,\Rightarrow_e
$$

Question 2

$((A \wedge B) \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$

1 point

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A \wedge B) \Rightarrow C, A, B \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{(A \wedge B) \Rightarrow C, A, B \vdash A}\,ax \quad \dfrac{}{(A \wedge B) \Rightarrow C, A, B \vdash B}\,ax}{(A \wedge B) \Rightarrow C, A, B \vdash A \wedge B}\,\wedge_i}{(A \wedge B) \Rightarrow C, A, B \vdash C}\,\Rightarrow_e}{(A \wedge B) \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))}\,2\times \Rightarrow_i
$$

Exercice 2

On considère les propositions suivantes :

- Si Alice et Julie viennent à Paris, Zoé viendra aussi
- Si Julie vient à Paris, Alice aussi
- Julie ou Zoé, l'une des deux au moins, viendra à Paris.

Question 3

Formaliser ces 3 propositions en logique des propositions.

1 point

Notons A la proposition Alice vient à Paris, J la proposition Julie vient à Paris et Z Zoé vient à Paris.

- Si Alice et Julie viennent à Paris, Zoé viendra aussi : $(A \land J) \Rightarrow Z$
- Si Julie vient à Paris, Alice aussi : $J \Rightarrow A$
- Julie ou Zoé, l'une des deux au moins, viendra à Paris : $J \lor Z$.

Question 4

Peut-on déduire de ces propositions que

- Alice viendra à Paris ?
- Julie viendra à Paris ?
- Zoé viendra à Paris ?

Pour chacune des questions, on donnera une preuve en déduction naturelle lorsque c'est possible.

2 points

On peut démontrer que Zoé vient à Paris.

On note $H = \{(A \land J) \Rightarrow Z, J \Rightarrow A, J \lor Z\}$

$$\lor_e \dfrac{ax\dfrac{}{H \vdash J \lor Z} \qquad D \qquad ax\dfrac{}{H, Z \vdash Z}}{H \vdash Z}$$

avec D l'arbre

$$cut\dfrac{\Rightarrow_e \dfrac{ax\dfrac{}{H, J, A \vdash (A \land J) \Rightarrow Z} \qquad \land_i \dfrac{ax\dfrac{}{H, J, A \vdash A} \qquad ax\dfrac{}{H, J, A \vdash J}}{H, J, A \vdash (A \land J)}}{H, J, A \vdash Z} \qquad \Rightarrow_e \dfrac{ax\dfrac{}{H, J \vdash J \Rightarrow A} \qquad ax\dfrac{}{H, J \vdash J}}{H, J \vdash A}}{H, J \vdash Z}$$

Exercice 3

Soit F une formule propositionnelle construite à partir des seuls connecteurs $\land$ et $\lor$ (et à partir de variables propositionnelles). Soient $p_1, \ldots, p_n$ ses variables propositionnelles.

Question 5

Montrer que si v est une interprétation telle que $v(p_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, alors $v(F) = 1$.

2 points

On considère l'ensemble des formules défini inductivement par :

- Une variable propositionnelle p est une formule
- Si F et G sont des formules alors $F \land G$ est une formule
- Si F et G sont des formules alors $F \lor G$ est une formule

Cet ensemble admet un principe d'induction structurelle que l'on va utiliser pour démontrer la propriété de l'énoncé. Il faut donc démontrer que pour toute formule F, pour toute interprétation v telle que $v(p) = 1$ pour toute variable proposionnelle p apparaissant dans F, on a $v(F) = 1$.
Dans la suite on note $var(F)$ l'ensemble des variables propositionnelles de F.

- 1er cas : F est la variable p. Soit v définie par $v(p) = 1$. Alors $v(F) = 1$ CQFD.

- 2eme cas : $F = F_1 \wedge F_2$.
  On a deux hyppothèses d'induction $Hind_1$ et $Hind_2$
  $Hind_1$: pour toute interprétation v telle que $v(p) = 1$ pour toute variable proposionnelle p apparaissant dans F_1, on a $v(F_1) = 1$.
  $Hind_2$: pour toute interprétation v telle que $v(p) = 1$ pour toute variable proposionnelle p apparaissant dans F_2, on a $v(F_2) = 1$.
  Soit v' une interprétation v' telle que $v'(p) = 1$ pour toute variable proposionnelle p apparaissant dans F, on doit montrer que $v'(F) = 1$.
  On peut appliquer l'hypothèse d'induction $Hind_1$ à v'. En effet $var(F_1) \subset var(F)$ et donc pour toute variable p de F_1, on a $v'(p) = 1$ et donc $v'(F_1) = 1$.
  Idem pour F_2 : $v'(F_2) = 1$
  Et donc $v'(F) = v'(F_1 \wedge F_2) = 1$
  CQFD.

- 3eme cas : $F = F_1 \vee F_2$.
  La démonstration suit celle du 2ème cas

Exercice 4

Soient F et G deux formules sans variable propositionnelle commune.

Question 6

Montrer que si $F \Rightarrow G$ est une tautologie, alors l'une au moins des formules $\neg F$ et G est une tautologie.

2 points

La démonstration se fait par l'absurde.
Supposons $F \Rightarrow G$ est une tautologie (i.e. vraie pour toute interprétation) , et que $\neg F$ et G ne sont pas des tautologies.
$\neg F$ n'est pas une tautologie donc il existe une interprétation v telle $v(\neg F) = 0$ donc $v(F) = 1$. Cette interprétation est définie sur les variables de F.
G n'est pas une tautologie donc il existe une interprétation u telle $u(G) = 0$. Cette interprétation est définie sur les variables de G.
Définissons l'interprétation w de $F \Rightarrow G$ par :

- $w(p) = v(p)$ si p est une variable de F
- $w(p) = u(p)$ si p est une variable de G.

Cette interprétation est parfaitement définie puisque les variables de F et de G sont distinctes (hypothèse de l'énoncé).
On a $w(F \Rightarrow G) = 0$ car $w(F) = v(F) = 0$ et $w(G) = u(G) = 1$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $F \Rightarrow G$ *est une tautologie.*

2 Logique des prédicats

Exercice 5

Considérons le langage du premier ordre $L = \{R, S, =, f, g, a\}$ où

- R, S et $=$ désignent deux symboles de relation binaire
- f et g désignent deux symboles de fonctions, f d'arité 1 et g d'arité 2
- a désigne un symbole de constante

Soit F la formule suivante,

$$\forall y(\exists z(R(y, g(z, a)) \vee S(x, y))) \wedge \exists y(g(x, a) = y \Rightarrow \neg S(y, z))$$

Question 7

Souligner dans F les termes (on ne soulignera pas les sous-termes) et encadrer les formules atomiques (utiliser si possible des couleurs différentes)

1 point

Les formules atomiques sont écrites en rouge et les termes sont soulignés.

$$\forall y(\exists z(R(\underline{y}, \underline{g(z, a)}) \vee S(\underline{x}, \underline{y}))) \wedge \exists y(\underline{g(x, a)} = \underline{y} \Rightarrow \neg S(\underline{y}, \underline{z}))$$

Question 8

Préciser dans F les variables libres et liées.

1 point On rappelle qu'une variable est libre dans une formule si elle a au moins une occurrence libre. Ainsi x et z sont libres. Leurs occurrences libres sont soulignées dans la formule ci-dessous.

$$\forall y(\exists z(R(y, g(z, a)) \vee S(\underline{x}, y))) \wedge \exists y(g(\underline{x}, a) = y \Rightarrow \neg S(y, \underline{z}))$$

Question 9

Dans F renommer les variables de sorte que les variables libres n'aient plus aucune occurrence liée et qu'aucune variable ne soit quantifiée plus d'une fois.

1 point

$$\forall y(\exists t(R(y, g(t, a)) \vee S(x, y))) \wedge \exists u(g(x, a) = u \Rightarrow \neg S(u, z))$$

Exercice 6

On reprend le langage L de l'exercice précédent. Soit F la formule

$$\exists y(\forall z(R(x, w) \Rightarrow f(x) = y)) \wedge (z = g(x, y)) \wedge \forall z \exists x(f(z) = g(x, x))$$

Pour chacun des termes suivants t, écrire $F[x := t]$ (c'est-à-dire la substitution de t à la variable x dans F).

- $t = g(w, a)$
  1 point

$$\exists y(\forall z(R(g(w, a), w) \Rightarrow f(g(w, a)) = y)) \wedge (z = g(g(w, a), y)) \wedge \forall z \exists x(f(z) = g(x, x))$$

- $t = g(f(y), y)$
  1 point

  $\exists y'(\forall z(R(g(f(y), y), w) \Rightarrow f(g(f(y), y)) = y')) \wedge (z = g(g(f(y), y), y)) \wedge \forall z \exists x(f(z) = g(x, x))$

  Pour éviter la capture de y dans la première partie de la formule, on a renommé la variable liée y en y' dans la formule.

- $t = g(x, y)$

  1 point

  $$\exists y'(\forall z(R(g(x, y), w) \Rightarrow f(g(x, y)) = y')) \wedge (z = g(g(x, y), y)) \wedge \forall z \exists x(f(z) = g(x, x))$$

  Idem, pour éviter la capture de y dans la première partie de la formule, on a renommé la variable liée y en y' dans la formule.

- $t = g(x, z)$

  1 point

  $$\exists y(\forall z'(R(g(x, z), w) \Rightarrow f(g(x, z)) = y)) \wedge (z = g(g(x, z), y)) \wedge \forall z \exists x(f(z) = g(x, x))$$

  Idem, pour éviter la capture de z, on a renommé la variable liée z en z' dans la formule.

Exercice 7

4 points - Retirer 0,5 point dès qu'une phrase est fausse (tout ou rien)

Considérons deux personnes appelées Alice et Zola représentées par des constantes a et z, et le roman *Germinal* représenté par la constante g. En utilisant les prédicats

- R(y) interprété par *y est un roman*
- H(x) interprété par *x est un être humain*
- E(x, y) interprété par *x a écrit y*
- L(x, y) interprété par *x a lu y*

et le prédicat =,
formaliser les énoncés suivants :

1. Alice a lu Germinal $L(a, g)$
2. Quelqu'un a lu Germinal $\exists x(H(x) \wedge L(x, g))$
3. Tout le monde a lu Germinal $\forall x(H(x) \Rightarrow L(x, g))$
4. Tout le monde n'a pas lu Germinal $\exists x(H(x) \wedge \neg L(x, g))$
5. Quelqu'un n'a pas lu Germinal $\exists x(H(x) \wedge \neg L(x, g))$
6. Alice a lu un roman $\exists y(R(y) \wedge L(a, y))$
7. Alice a lu exactement deux romans
   $\exists x \exists y(R(x) \wedge R(y) \wedge L(a, x) \wedge L(a, y) \wedge \neg(x = y) \wedge (\forall z(R(z) \wedge L(a, z)) \Rightarrow z = x \vee z = y))$

8. Germinal a été écrit par Zola $E(z, g)$
9. Alice a lu tous les romans de Zola $\forall y((R(y) \wedge E(z, y)) \Rightarrow L(a, y))$
10. Alice n'a pas lu tous les romans $\exists y(R(y) \wedge \neg L(a, y))$
11. Tout le monde a lu un roman de Zola
    $\forall x(H(x) \Rightarrow (\exists y(R(y) \wedge E(z, y) \wedge L(x, y)))))$
12. Tous les romans de Zola ont été lus
    $\forall y(R(y) \wedge E(z, y) \Rightarrow \exists x(H(x) \wedge L(x, y))))$
13. Tous ceux qui ont écrit un roman ont lu Germinal
    $\forall x(H(x) \wedge \exists y(R(y) \wedge E(x, y)) \Rightarrow L(x, g))$
14. Tous les romans n'ont pas été écrits par une même personne
    $\neg(\exists x(H(x) \wedge \forall y(R(y) \Rightarrow E(x, y))))$
15. Alice n'a lu que des romans de Zola $\forall y((R(y) \wedge L(a, y)) \Rightarrow E(z, y))$

On rappelle ci dessous les règles d'inférence de la logique propositionnelle classique en déduction naturelle.

(ax) $$\Delta, A \vdash A$$

(aff) $$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta, B \vdash A}$$

$(\Rightarrow_i)$ $$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \Rightarrow B}$$

$(\Rightarrow_e)$ $$\frac{\Delta \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}$$

$(\wedge i)$ $$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}$$

$(\wedge e_g)$ $$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}$$

$(\wedge e_d)$ $$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}$$

$(\vee i_g)$ $$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}$$

$(\vee i_d)$ $$\frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}$$

$(\vee e)$ $$\frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}$$

$(\neg i)$ $$\frac{\Delta, A \vdash \bot}{\Delta \vdash \neg A}$$

$(\neg e)$ $$\frac{\Delta \vdash \neg A \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash \bot}$$

$(\bot_c)$ $$\frac{\Delta, \neg A \vdash \bot}{\Delta \vdash A}$$