Logique : ENSIIE 1A - contrôle final
- CORRIGÉ
Mardi 31 mai 2011 -
Sans documents - Sans calculatrice ni ordinateur
Durée : 1h45 - 4 pages de sujet

Les exercices sont indépendants. Les règles de déduction naturelle pour la logique propositionnelle et la logique des prédicats sont rappelées en fin de sujet.

Exercice 1 (**Définition inductive**)

On définit inductivement un ensemble F de triplets (a, b, c) d'entiers naturels ($F \subseteq \mathbb{N}^3$) de la manière suivante.

F est le plus petit ensemble tel que :

- $(0, 0, 0)$ appartient à F.
- Si (a, b, c) appartient à F alors $(a, b+1, c+1)$ appartient à F.
- Si (a, b, c) appartient à F alors $(a+1, b+1, c)$ appartient à F.

Question 1

Donner 5 éléments de F.

Question 2

Donner un élément de $\mathbb{N}^3$ qui n'est pas dans F.

Question 3

Caractériser les triplets de F. Justifier votre réponse à l'aide d'une démonstration mathématique.

1. $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 4, 1)$
2. $(1, 1, 1)$.
3. Les triplets de F sont les triplets de la forme $(a, a+b, b)$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. Pour le prouver nous procédons par double inclusion:
   (a) Prouvons que tous les éléments de F sont de la forme $(a, a+b, b)$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.
   Par induction structurelle sur F. $(0, 0, 0)$ est bien de cette forme. Si (a, b, c) est de cette forme (on a $b = a+c$). Alors $(a, b+1, c+1)$ est de cette forme car $(a+c)+1 = a+(c+1)$. Si (a, b, c) est de cette forme (on a $b = a+c$). Alors $(a+1, b+1, c)$ est de cette forme car $(a+1)+c = (a+c)+1 = b+1$.
   (b) Prouvons que tous les triplets de la forme $(a, a+b, b)$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ sont des éléments de F. En appliquant b fois la première règle et a fois la deuxième règle en partant de $(0, 0, 0)$ on obtient que $(a, a+b, b) \in F$.

Exercice 2 (**Questions de cours : logique des prédicats**)

Question 4

Quand dit-on qu'une variable est libre dans une formule ?

Une variable est dite libre dans une formule si elle possède au moins une occurrence libre.

Question 5

Quelles sont les variables que l'on peut renommer dans une formule du langage des prédicats sans en changer le sens ?

Question 6

Donner la définition formelle de l'opération de substitution à la variable x du terme u dans la formule F ($F[x := u]$). On pourra utiliser sans la définir la substitution dans un terme t ($t[x := u]$).

Exercice 3

On suppose que l'on a les règles et faits suivants:

- Si Pierre rate son tournoi alors Pierre sera déprimé.
- S'il fait beau alors Pierre ira à la piscine.
- Si Pierre ne va pas à la piscine il sera déprimé.
- A la piscine, Pierre ne s'entraîne pas.
- Pierre ratera son tournoi s'il ne s'entraîne pas.

Question 7

Modéliser l'énoncé à l'aide de formules de la logique propositionnelle.

Question 8

Prouver que Pierre sera déprimé à l'aide d'un raisonnement sémantique.

Question 9

Prouver que Pierre sera déprimé à l'aide d'une preuve en déduction naturelle. On pourra utiliser le tiers exclu sous la forme de l'axiome $\Gamma \vdash P \vee \neg P$.

1. (a) $R \Rightarrow D$
   (b) $B \Rightarrow P$
   (c) $\neg P \Rightarrow D$
   (d) $P \Rightarrow \neg E$
   (e) $\neg E \Rightarrow R$
2. (a) Montrons que $R \Rightarrow D, B \Rightarrow P, \neg P \Rightarrow D, P \Rightarrow \neg E, \neg E \Rightarrow R \models D$. Soit I une interprétation qui satisfait les hypothèses, montrons que I satisfait D. Si $I(P) = 1$ alors $I(\neg E) = 1$ donc $I(R) = 1$ dont $I(D) = 1$. Sinon $I(P) = 0$ donc $I(\neg P) = 1$ donc $I(D) = 1$.
   (b) Posons $\Gamma = R \Rightarrow D, B \Rightarrow P, \neg P \Rightarrow D, P \Rightarrow \neg E, \neg E \Rightarrow R$.

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P \vee \neg P} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P \vdash R \Rightarrow D} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P \vdash \neg E \Rightarrow R} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P \vdash P \Rightarrow \neg E} \quad \dfrac{}{\Gamma, P \vdash P}}{\Gamma, P \vdash \neg E}}{\Gamma, P \vdash R}}{\Gamma, P \vdash D} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg P \vdash \neg P \Rightarrow D} \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg P}}{\Gamma, \neg P \vdash D}}{\Gamma \vdash D} \, e\vee$$

Exercice 4 (**Formalisation en logique des prédicats**)

Question 10

En utilisant uniquement le symbole de relation binaire *connait* ($connait(x, y)$ formalise x *connaît* y) et les constantes $Tarzan$ et $Jane$, formalisez en logique des prédicats les phrases suivantes (leur traduction en anglais est donnée entre parenthèses) :

1. Quelqu'un connaît Jane (Somebody knows Jane)
2. Personne ne connaît tout le monde (Nobody knows everyone)
3. Tarzan connaît tous ceux qui connaissent Jane (Tarzan knows all those who know Jane)
4. Jane connaît quelqu'un qui connaît tout le monde (Jane knows someone who knows everyone)

1. Quelqu'un connaît Jane : $\exists x, connait(x, Jane)$
2. Personne ne connaît tout le monde : $\neg(\exists x, \forall y, connait(x, y))$ ou $\forall x, \exists y, \neg(connait(x, y))$
3. Tarzan connaît tous ceux qui connaissent Jane : $\forall y, connait(y, Jane) \Rightarrow connait(Tarzan, y)$
4. Jane connaît quelqu'un qui connaît tout le monde : $\exists x, (connait(Jane, x) \wedge \forall y, connait(x, y))$.

Exercice 5 (**Déduction naturelle**)

Question 11

Démontrer la règle dérivée suivante :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash \neg A}\, ax \qquad \Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\, \neg_e}{\Gamma \vdash A}\, \bot_c$$

Question 12

Soit p un symbole de relation d'arité 1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(x) \vdash p(x)}\,ax}{p(x) \vdash \forall x\ p(x)}\,\forall_i}{\vdash p(x) \Rightarrow \forall x\ p(x)}\,\Rightarrow_i$$

Cette preuve en déduction naturelle n'est pas correcte. Expliquez pourquoi.

C'est l'application de la règle $\forall_i$ qui est incorrecte. En effet x est libre dans le contexte d'hypothèses i, ici $p(x)$. Par conséquent si on veut appliquer correctement la règle, on doit renommer $\forall x\ p(x)$ en $\forall y\ p(y)$. L'arbre devient alors :

$$\dfrac{\dfrac{p(x) \vdash p(y)}{p(x) \vdash \forall x\ p(x)}\,\forall_i}{\vdash p(x) \Rightarrow \forall x\ p(x)}\,\Rightarrow_i$$

Et ceci ne nous mène à rien.

Question 13

Corrigez la preuve en déduction naturelle si vous pensez que la formule $p(x) \Rightarrow \forall x\ p(x)$ est valide. Donnez un modèle (une interprétation) dans lequel la formule est fausse, si vous pensez le contraire.

La formule n'est pas valide. Considérons le modèle où le domaine est Z (l'ensemble des enteirs relatifs), et p la relation *supérieur ou égal à 0*. Si on prend la valuation σ définie par $\sigma(x) = 1$. La formule est fausse pour cette valuation et ce modèle.

Exercice 6 (**Construction de modèles**)

Soit le langage muni d'un symbole d'égalité $=$ et d'un symbole de relation R d'arité 2. Soient les formules suivantes :

- $F_1 : \forall x R(x, x)$
- $F_2 : \forall x \forall y((R(x, y) \wedge R(y, x)) \Rightarrow x = y)$
- $F_3 : \forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$
- $F_4 : \forall x \forall y((R(x, y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow \exists z(R(x, z) \wedge R(z, y) \wedge \neg(z = x) \wedge \neg(z = y)))$
- $F_5 : \forall x \exists y(R(y, x) \wedge \neg(x = y))$
- $F_6 : \forall x \exists y(R(x, y) \wedge \neg(x = y))$

Remarques : F_1, F_2 et F_3 expriment que R est une relation d'équivalence. F_4 dit que pour deux éléments distincts en relation, on peut en trouver un 3ème en relation avec les deux premiers. Enfin F_5 et F_6 expriment que tout élément est en relation avec un autre *à droite* ou *à gauche*.

Question 14

Donner un modèle qui satisfait toutes les formules de l'ensemble $T_1 = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}$.

Il suffit de prendre les réels ou les rationnels et d'interpréter R par la relation d'ordre $\leq$ usuelle.

Question 15

Donner un modèle qui satisfait les formules de $T_2 = \{F_1, F_2, F_3, \neg(F_4), \neg(F_5), \neg(F_6)\}$.

Il suffit de prendre les entiers compris entre 1 et 10 par exemple et d'interpréter R par la relation d'ordre $\leq$ usuelle.

Question 16

Expliquez pourquoi on ne peut pas trouver de modèle qui satisfait les formules de l'ensemble $T_3 = T_1 \cup \{\exists x_1 \exists x_2 \forall x(x = x_1 \vee x = x_2)\}$.

Par F_5 ou F_6, le modèle contient au moins 2 éléments distincts. Par F_4 il doit en contenir une infinité. Comme la formule $\exists x_1 \exists x_2 \forall x(x = x_1 \vee x = x_2)$ exprime que le modèle contient au plus deux éléments, les formules de l'ensemble T_3 sont contradictoires.

(ax) $\quad \Delta, A \vdash A$

(aff) $\quad \dfrac{\Delta \vdash A}{\Delta, B \vdash A}$

$(\Rightarrow_i)$ $\quad \dfrac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \Rightarrow B}$

$(\Rightarrow_e)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}$

$(\wedge i)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}$

$(\wedge e_g)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}$

$(\wedge e_d)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}$

$(\vee i_g)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}$

$(\vee i_d)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}$

$(\vee e)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}$

$(\neg i)$ $\quad \dfrac{\Delta, A \vdash \bot}{\Delta \vdash \neg A}$

$(\neg e)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash \neg A \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash \bot}$

$(\bot_c)$ $\quad \dfrac{\Delta, \neg A \vdash \bot}{\Delta \vdash A}$

$(\forall i)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash A \ (x \text{ non libre dans } \Delta)}{\Delta \vdash \forall x \ A}$

$(\forall e)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash \forall x \ A}{\Delta \vdash A[x := t]}$

$(\exists i)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash A[x := t]}{\Delta \vdash \exists x \ A}$

$(\exists e)$ $\quad \dfrac{\Delta \vdash \exists x A \quad \Delta, A \vdash C \ (x \text{ non libre dans } \Delta, C)}{\Delta \vdash C}$