MLO - TD logique des prédicats

Exercice 1 (**Logique du premier ordre et syntaxe**)

Question 1

Quand dit-on qu'une variable est libre dans une formule ?

Une variable est dite libre dans une formule si elle possède au moins une occurrence libre.

Dans la suite de l'exercice, nous considérons le langage du premier ordre $L = \{R, S, f, a\}$ où R et S désignent deux symboles de relation respectivement unaire et binaire, f désigne un symbole de fonction unaire et a désigne un symbole de constante.
Soit F la formule suivante :

$$(\forall x \exists y R(f(x), f(y))) \wedge ((\forall z(R(x, z)) \Rightarrow S(x)))$$

Question 2

Enumérez les termes qui apparaissent dans F ainsi que les sous-formules de F.

Question 3

Les variables x et y sont-elles libres dans la formule F ? Justifiez votre réponse en quelques mots.

x est libre dans la formule car il existe deux occurrences libres (les deuxième et troisième occurrences quand on lit la formule de gauche à droite). En revanche y est une variable liée car toutes ses occurrences (une seule) sont liées.

Question 4

Transformez la formule F précédente de manière à ce que variables liées et variables libres (éventuelles) ne portent pas le même nom.

On renomme les variables liées qui ont aussi une occurrence libre. Soit ici le x quantifié universellement. On ne renomme pas les variables libres, on changerait le sens de la formule.

$$(\forall u \exists y R(f(u), f(y))) \wedge ((\forall z R(x, z)) \Rightarrow S(x))$$

Question 5

Donnez la formule $F[x := t]$ (c'est-à-dire la substitution de t à la variable x dans F) quand t est le terme $f(y)$. Cette substitution ne concerne que l'occurrence libre de x.

$$(\forall x \exists y R(f(x), f(y))) \wedge ((\forall z(R(f(y), z)) \Rightarrow S(f(y)))$$

Question 6

Donnez la formule $F[x := t]$ (c'est-à-dire la substitution de t à la variable x dans F) quand t est le terme $f(z)$.

$$(\forall x \exists y R(f(x), f(y))) \wedge ((\forall v R(f(z), v)) \Rightarrow S(f(z)))$$

Cette substitution ne concerne que l'occurrence libre de x. Pour éviter la capture de la variable z (dans le terme $t = f(z)$) par le quantificateur, on commence par renommer dans la formule F la variable liée z en v puis on fait le remplacement. D'où la formule ci-dessus.

Exercice 2 (**Modélisation**)

Modélisez en logique du premier ordre les phrases précédentes ci-dessus :

1. Marcus était une personne

2. Marcus était un pompéen
3. Tous les pompéens étaient des romains
4. César était souverain
5. Tous les romains étaient fidèles à César ou le haissaient
6. Chacun est fidèle à quelqu'un
7. Les personnes n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles
8. Marcus a essayé d'assassiner César

Exercice 3 (**Modélisation**)

Représenter la phrase "Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x." par une formule logique en utilisant les prédicats suivants :

entier(x)	"x est un entier naturel"
successeur(x, y)	"x est successeur de y"
inf(x, y)	"x est inférieur ou égal à y"

$$\forall n(entier(n) \Rightarrow (\exists m(entier(m) \wedge successeur(m,n) \wedge (\forall r((entier(r) \wedge \neg(inf(r,x))) \Rightarrow inf(m,r))))))$$

Exercice 4 (**Modélisation de l'article un**)

Préciser à l'aide d'un quantificateur le sens de "un" dans les phrases suivantes et formaliser les en logique des prédicats :

1. Jean suit un cours.
2. Un logicien a été champion du monde de cyclisme.
3. Un entier naturel est pair ou impair.
4. Un enseignant-chercheur a toujours un nouveau sujet à étudier.
5. Dans un triangle isocèle une médiane est également hauteur.
6. Dans un triangle équilatéral une médiane est également hauteur.

1. Jean suit un cours : on introduit un symbole de relation binaire *suit* et une constante *Jean*.
$$\exists c, suit(Jean, c).$$
2. Un logicien a été champion du monde de cyclisme : on introduit deux symboles de relation d'arité 1 *champion*, *logicien*.
$$\exists l, logicien(l) \wedge champion(l)$$
3. Un entier naturel est pair ou impair : ici 3 symboles de relation d'arité 1 : *naturel*, *pair*, *impair*.
$$\forall n(naturel(n) \Rightarrow (pair(n) \vee impair(n))$$

4. Un enseignant-chercheur a toujours un nouveau sujet à étudier : deux symboles de relation d'arité 1 *ec*, *nouveau* et un symbole de relation d'arité 2 *etudie*.

$$\forall x(ec(x) \Rightarrow (\exists y(nouveau(y) \wedge etudie(x, y))))$$

5. Dans un triangle isocèle une médiane est également hauteur : : on introduit deux symboles de relation unaire *triangle*, *isocele* et deux symboles de relation binaire *mediane* (m est une médiane de t) et *hauteur*.

$$\forall t((triangle(t) \wedge isocele(t)) \Rightarrow (\exists m(mediane(m, t) \wedge hauteur(m, t))))$$

6. Dans un triangle équilatéral une médiane est également hauteur : on introduit deux symboles de relation unaire *triangle*, *equilateral* et deux symboles de relation binaire *mediane* (m est une médiane de t) et *hauteur*.

$$\forall t((triangle(t) \wedge equilateral(t)) \Rightarrow (\forall m(mediane(m, t) \Rightarrow hauteur(m, t))))$$

Exercice 5 (Vérité dans un modèle)

Soit le modèle M suivant, dites si M est un modèle des formules suivantes.

$D = \{Antoine, Beatrice, Christine\}$
$a_M = Antoine$
$b_M = Beatrice$
$c_M = Christine$
$P_M = \{Antoine, Christine\}$
$Q_M = \{Antoine, Beatrice, Christine\}$
$R_M = \emptyset$

1. P(a) Vraie dans M parce que I(a) appartient à P_M.
2. Q(c) Vraie dans M parce que I(c) appartient à Q_M.
3. R(b) Fausse dans M parce que I(b) n'appartient pas à l'interprétation de R.
4. $\forall x Q(x)$ Vraie dans M parce qu'une instance au moins de cette formule est vraie dans M : Q(c) est vraie dans M.
5. $\forall x P(x)$ Fausse dans M parce que toutes ses instances ne sont pas vraies dans M : Pb est fausse dans M.
6. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ Vraie dans M parce que toutes ses instances sont vraies dans M : $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est vraie dans M parce que Q(a) est vraie dans M. $P(b) \Rightarrow Q(b)$ est vraie dans M parce que Q(b) est vraie dans M. $P(c) \Rightarrow Q(c)$ est vraie dans M parce que Q(c) est vraie dans M.
7. $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ Profiter de cet exemple pour faire remarquer que cette formule et la précédente ne veulent pas dire la même chose.
8. $\exists x(Q(x) \wedge \neg P(x))$ Vraie dans M parce qu'une instance au moins est vraie dans M : $Q(b) \wedge \neg P(b)$ est vraie dans M. $P(b)$ est faux dans M, donc $\neg P(b)$ est vraie dans M, et $Q(b)$ est vraie dans M.
9. $\neg(\exists x R(x))$ Vraie dans M parce que $\exists x R(x))$ est fausse dans M (parce qu'il n'y a pas d'instance vraie de cette formule dans M). R(a) est fausse dans M. R(b) est fausse dans M. R(c) est fausse dans M.

10. $\exists x(\neg Q(x) \Rightarrow P(x))$ Vraie dans M parce qu'une instance au moins de cette formule est vraie dans M : $\neg Qa \Rightarrow Pa$ est vraie dans M. En effet, Q(a) est vraie dans M.

11. $\exists x \neg (Q(x) \Rightarrow P(x))$ Vraie dans M parce qu'une instance au moins de cette formule est vraie dans M: $\neg(Qb \Rightarrow Pb)$ est vraie dans M.

Exercice 6 (**Logique du premier ordre et sémantique**)

On considère le langage du premier ordre composé d'un symbole de fonction f d'arité 2, du symbole binaire de l'égalité $=$ (on l'utilisera avec la notation infixe habituelle) et d'un symbole de relation R d'arité 2. Les variables sont notées x, y, z .... Soit l'interprétation suivante :
- le domaine est Z (ensemble des entiers relatifs),
- l'interprétation de f, soit f_I, est l'addition sur Z,
- l'interprétation de R, soit R_I, est la relation $<$,
- l'interprétation de $=$, soit $=_I$, est l'égalité sur Z.

Question 7

Quelle est la valeur de vérité de chacune des 3 formules ci-dessous dans cette interprétation ? Vous justifierez votre réponse en quelques lignes.
On rappelle que la valeur de vérité d'une formule peut dépendre d'une valuation.
- F_1 : $\forall x \exists z(f(z, y) = x)$
- F_2 : $\exists x(R(x, y) \wedge R(y, f(x, x))))$
- F_3 : $\forall x(R(x, y) \Rightarrow R(f(x, x), y))$

- La valeur de vérité de la formule F_1 dépend a priori de la valeur associée à la variable libre y. Soit a la valeur de y (c'est un entier).
La valeur de vérité de F_1 sera 1 si pour tout entier n il existe un entier m tel que m+a=n. Pour n et a donnés, il suffit de prendre m=n-a. Donc la valeur de vérité de F_1 est 1, quelle que soit la valeur de y.
- De même, ici, y est une variable libre. Soit a sa valeur. On se pose la question de savoir si il existe un entier n tel n <a et a < 2n. La valeur de vérité de F_2 est 1 si a>2, 0 sinon.
- De même, ici, y est une variable libre. Soit a sa valeur. On se pose la question de savoir si pour tout entier n tel n <a alors 2n < a. Ceci est vrai si a < 2. Donc la valeur de vérité de F_3 est 1 si a<2, 0 sinon.

Exercice 7 (**Modèles**)

Soient les formules logiques :

1. $\forall x(\neg R(x, x) \wedge \forall y((R(x, y) \Rightarrow \neg R(y, x)) \wedge \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))))$
2. $\exists x \forall y R(x, y)$
3. $\forall x \exists y R(x, y)$
4. $\exists x \forall y R(y, x)$
5. $\forall x \exists y R(y, x)$
6. $\forall x \exists y(R(x, y) \wedge \forall z(R(x, z) \Rightarrow (z = y \vee R(y, z))))$

7. $\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \exists z (R(x,z) \wedge R(z,y)))$

Quelles sont parmi ces formules celles qui sont valides dans les interprétations ci-dessous :

1. les entiers naturels (positifs) comme domaine et $<$ pour R.
2. les entiers relatifs comme domaine et $<$ pour R.
3. les rationnels comme domaine et $<$ pour R.
4. l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ comme domaine et $\subset$ (l'inclusion stricte) pour R.

Exercice 8 (Sémantique)

On considère le langage du premier ordre composé de deux symboles de relation P et Q d'arité 1. Soit A la formule $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ e B la formule $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x))$.

On se propose d'étudier les modèles dans lesquels ces formules sont vraies. Soit D un ensemble non vide, support du modèle. On note D_P l'ensemble des éléments de D tels que $I_P(d) = v$ (c'est l'interprétation de P sur D). De même D_P est l'ensemble des éléments de D tels que $I_Q(d) = v$ (c'est l'interprétation de Q sur D).

Question 8

Quelles conditions doivent vérifier D_P et D_Q pour que la formule A soit vraie dans le modèle défini par$D$, D_P et D_Q ?

Question 9

Quelles conditions doivent vérifier D_P et D_Q pour que la formule B soit vraie dans le modèle défini par$D$, D_P et D_Q ?

Exercice 9 (Harry est plus rapide que Ralph)

Un cheval est plus rapide qu'un chien.
Il existe un lévrier qui est plus rapide que tout lapin
Tout lévrier est un chien
Harry est un cheval
Ralph est un lapin
La relation *être plus rapide que* est transitive.

Question 10

Formaliser les phrases précédentes en logique des prédicats.

En analysant le texte, on dégage différentes notions et propriétés : être un cheval, être un lapin, être un lévrier, être plus rapide que et deux indicidus Harry et Ralph.
On va modéliser cela à l'aide d'un langage contenant deux constantes (symbole de fonction d'arité 0) H (pour Harry) et $Ralph$ (pour Ralph), 3 symboles de relation d'arité 1 *chien*, *cheval* et *levrier* et un symbole de relation binaire *plus* (pour plus rapide que).

$H_1 : \forall x \forall y (cheval(x) \wedge chien(y) \Rightarrow plus(x,y))$
$H_2 : \exists l_0 (levrier(l_0) \wedge (\forall y (lapin(y) \Rightarrow plus(l_0,y))))$
$H_3 : \forall x (levrier(x) \Rightarrow chien(x))$
$H_4 : cheval(H)$
$H_5 : lapin(R)$
$H_6 : \forall x \forall y \forall z (plus(x,y) \wedge plus(y,z) \Rightarrow plus(x,z))$

Question 11

Prouvez à l'aide de la déduction naturelle que Harry est plus rapide que Ralph. Il s'agit de démontrer que cette formule se démontre en prenant les autres en hypothèse.

On pourra aussi faire la démonstration en Coq.

En déduction naturelle : voir le fichier JPEG.

En Coq

```
Variable T : Set.
Variable cheval : T -> Prop.
Variable levrier : T -> Prop.
Variable plusrapide : T -> T -> Prop.
Variable chien : T -> Prop.
Variable lapin : T -> Prop.

Variable Harry : T.
Variable Ralph : T.

Lemma harry_plus_rapide_ralph :
(forall x, forall y , cheval (x) -> chien (y) -> plusrapide x y) ->
(exists x, levrier (x) /\ (forall y, lapin(y) -> plusrapide x y)) ->
(forall x, levrier(x) -> chien(x)) ->
cheval(Harry) ->
lapin(Ralph) ->
(forall x, forall y, forall z, plusrapide x y -> plusrapide y z -> plusrapide x z) ->
 plusrapide Harry Ralph.
intros P1 P2 P3 P4 P5 P6.
elim P2;intros l0 defl0.
decompose [and] defl0.
apply (P6 Harry l0 Ralph).
apply P1.
assumption.
apply P3.
assumption.
apply H0.
assumption.
Qed.
```

Exercice 10 (**Théorème du buveur**)

Un célèbre théorème dit que dans tout bar non vide si il existe une personne x tel que si x boit alors tout le monde boit.

Question 12

Démontrer ce résultat en déduction naturelle. On pourra utiliser la règle du tiers exclus et la règle dérivée suivante :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg(\forall x A)}{\Gamma \vdash \exists x(\neg A)}$$

On formalise ce résultat en Coq en déclarant un ensemble d'habitants M, et un élément john dans cet ensemble (il y a au moins une personne dans le bar) :

```
Variable M : Set.
Variable john : M.
Variable boit : M -> Prop.
```

On aura besoin du tiers exclus (`Require Import Classical`).

Question 13

Démontrez en Coq le théorème du buveur :

`Theorem buveur : exists x, boit x -> forall y, boit y.`

Correction

```
Theorem buveur : exists x, boit x -> forall y, boit y.
Proof.
  assert ((forall x, boit x) \/ ~(forall x, boit x)).
  apply classic with (P := forall x, boit x).
  destruct H.
  (* Tout le monde boit, on choisit john. *)
  exists john.
  intro.
  assumption.
  (* Quelqun ne boit pas, on le choisit. *)
  assert (exists x, ~ boit x).
  apply not_all_ex_not.
  assumption.
  destruct H0.
  exists x.
  intro H2.
  elim H0.
  assumption.
Qed.
```