

Contrôle Continu (Mai 2011)

Notes de cours autorisées. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : satisfiabilité

Déterminer parmi les formules suivantes, celles qui sont valides, celles qui sont satisfiables et celles qui sont insatisfiables (justifier).

1. $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
2. $((A \Rightarrow B \wedge C) \vee B) \Rightarrow B \vee C$
3. $(A \wedge ((B \Rightarrow \neg A) \wedge (B \vee C) \wedge \neg C)) \Rightarrow B$
4. $(A \wedge \neg \neg \neg D \wedge B) \wedge (A \Rightarrow (C \vee D)) \wedge \neg C$

Correction :

1. La formule est valide (c'est une tautologie), faire la table de vérité.
2. La formule est satisfiable car toute interprétation qui satisfait B satisfait la formule. Elle n'est pas valide car l'interprétation telle que $I(A) = 0$, $I(B) = 0$ et $I(C) = 0$ ne satisfait pas la formule.
3. La formule est une tautologie car la formule $(A \wedge ((B \Rightarrow \neg A) \wedge (B \vee C) \wedge \neg C))$ est contradictoire. En effet pour toute interprétation qui satisfait la formule on aurait $I(A) = 1$ et $I(C) = 0$. Or comme $I(B \vee C) = 1$ on a $I(B) = 1$ donc $I(\neg A) = 1$ donc $I(A) = 0$ or on a $I(A) = 1$.
4. Par substitution de formule équivalentes la formule est équivalente à :

$$A \wedge \neg D \wedge B \wedge (A \Rightarrow (C \vee D)) \wedge \neg C$$

Toute interprétation qui satisfait la formule est telle que $I(A) = I(B) = 1$ et $I(C) = I(D) = 0$. Ce qui contredit $I(A \Rightarrow (C \vee D)) = 1$. Donc la formule est insatisfiable (contradictoire).

Exercice 2

Montrer que de plusieurs manières différentes que : $A, \neg B \models B \vee A$

Correction :

1. Soit I une interprétation qui satisfait A et $\neg B$, on a $I(A) = 1$ et $I(\neg B) = 1$ donc $I(B) = 0$. Cette interprétation satisfait donc $B \vee A$.
2. D'après la correction de la déduction naturelle pour montrer que $A, \neg B \models B \vee A$ on peut montrer que $A, \neg B \vdash B \vee A$ dans le formalisme de la déduction naturelle.
3. D'après le méta théorème de la déduction pour montrer que $A, \neg B \models B \vee A$ on peut montrer que $\models A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow B \vee A)$. Pour montrer que cette formule est valide on peut faire une table de vérité.

Exercice 3

A l'aide de la déduction naturelle démontrer que les formules suivantes sont valides :

1. $A \wedge B \wedge C \Rightarrow B \wedge A \wedge C$
2. $(A \wedge B) \wedge \neg A \Rightarrow (A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \wedge (A \wedge C))$
3. $A \wedge (B \vee C \vee D) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge (C \vee D))$
4. $(A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$

Exercice 4

On suppose que l'on a les règles et faits suivants :

1. Si le patient a la rougeole, il a de la fèvre.
 2. Si le patient a une hépatite, mais pas la rougeole, il a le teint jaune.
 3. Si le patient a de la fèvre ou le teint jaune, il a une hépatite ou la rougeole.
 4. Le patient n'a pas le teint jaune.
 5. Le patient a de la fèvre.
1. Modéliser l'énoncé à l'aide de formules de la logique propositionnelle.
 2. Établir un diagnostic, et démontrer que votre réponse est correcte à l'aide :
 - (a) d'une application de la méthode de *résolution* et
 - (b) d'une preuve en déduction naturelle.

Correction :

1. Modélisation :
 - (a) $R \Rightarrow F$
 - (b) $H \wedge \neg R \Rightarrow J$
 - (c) $F \vee J \Rightarrow H \vee R$
 - (d) $\neg J$
 - (e) F
2. Le patient a la rougeole. Mise sous forme de clauses :
 - (a) $\neg R \vee F$
 - (b) $\neg H \vee R \vee J$
 - (c) $H \vee R \vee \neg F$
 - (d) $H \vee R \vee \neg J$
 - (e) $\neg J$
 - (f) F
 - (g) $\neg R$ (négation de la conclusion)

Résolution :

- (g) + (c) donne (h) : $H \vee \neg F$
 (h) + (f) donne (i) : H
 (i) + (b) donne (j) : $R \vee J$
 (j) + (e) donne (h) : R
 (h) + (g) donne $\perp$

Exercice 5

Dans cet exercice on s'intéresse à la logique propositionnelle tri-valuée c'est à dire qu'au lieu d'interpréter chaque variable/formule par 'vrai' ou 'faux', on les interprète par 'vrai', 'faux' et 'inconnu'. On se donne les tables de vérité pour $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et $\Rightarrow$ suivantes :

$A \wedge B$	V	F	I
V	V	F	I
F	F	F	F
I	I	F	I

A	$\neg A$
V	F
F	V
I	I

$A \vee B$	V	F	I
V	V	V	V
F	V	F	I
I	V	I	I

$A \Rightarrow B$	V	F	I
V	V	F	I
F	V	V	V
I	V	I	V

On appelle tri-valuation une fonction qui associe à chaque variable une valeur dans $\{V, F, I\}$. On dit qu'une tri-valuation satisfait une formule G si $I(G) = V$. On dit qu'une formule G est une tautologie (noté $\models_3 G$) si $I(G) = V$ pour toutes les tri-valuations I possibles. On dit que G est conséquence de Γ (noté $\Gamma \models_3 G$) si toute interprétation qui satisfait toutes les formules de Γ satisfait G .

1. Montrer que $A \vee \neg A$ n'est pas une tautologie.

Correction : Faire la table de vérité.

2. Trouver une tautologie.

Correction : $A \Rightarrow A$

3. Donner la table de vérité de $\neg A \vee B$. Comparer avec $A \Rightarrow B$.

Correction : On trouve deux tables de vérité différentes.

4. Donner la table de vérité de $\neg B \Rightarrow \neg A$. Comparer avec $A \Rightarrow B$.

Correction : On trouve la même table de vérité.

5. Dans cette question on change la table de vérité de l'implication (que l'on note $A \rightarrow B$) :

$A \rightarrow B$	V	F	I
V	V	F	I
F	V	V	V
I	V	I	I

- (a) Donner la table de vérité de $\neg B \rightarrow \neg A$. Comparer avec $A \rightarrow B$.

- (b) Que dire de $A \rightarrow A$?

Correction : Ce n'est pas une tautologie ! (dans le cas où $I(A) = I(B) = I$ on a $I(A \rightarrow A) = I$)

- (c) Montrer qu'il n'existe aucune tautologie avec cette définition de l'implication.

Correction : Par induction sur la structure des formules on prouve que l'interprétation J qui interprète chacune des variables par I , est telle que $J(F) = I$: Cas de base : c'est vrai pour les variables (par définition de la satisfaction). Cas d'induction :

- i. Si la formule F est de la forme $A \Rightarrow B$. Par hypothèse d'induction on a $J(A) = I$ et $J(B) = I$.
Donc d'après la table de vérité de l'implication $J(F) = I$.

ii. Les autres cas sont similaires car les tables de vérité du $\vee$, $\wedge$, $\neg$ contiennent I pour $J(A) = I$ et $J(B) = I$.

(d) Que dire du méta énoncé " $A \models_3 B$ ssi $\models_3 A \rightarrow B$ " ?

Correction : Cet énoncé est faux dans cette logique. En effet on a $A \wedge B \models_3 A$ mais $A \wedge B \rightarrow A$ n'est pas une tautologie.