Logique : MLO - contrôle continu -
CORRIGÉ
Mercredi 4 mai 2011 - Sans documents - durée : 45 mn

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Prouver les deux séquents suivants en déduction naturelle :
$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
$\vdash (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Vous présenterez la preuve sous la forme d'un arbre de dérivation qui n'utilise que les règles d'inférence rappelées en fin de sujet et éventuellement l'axiome (dérivé) du tiers exclus :

$$(TE) \quad \Delta \vdash F \vee \neg F$$

Dans les deux arbres de dérivation ci-dessous, les feuilles non marquées par un nom de règle sont toutes des instances de l'axiome ax.

1er séquent :

$$\Rightarrow_i \dfrac{\vee_e \dfrac{TE\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \vee \neg A} \qquad \vee_{ig}\dfrac{A \Rightarrow B, \neg A \vdash \neg A}{A \Rightarrow B, \neg A \vdash \neg A \vee B} \qquad \vee_{id}\dfrac{\Rightarrow_e \dfrac{A \Rightarrow B, A \vdash A \Rightarrow B \qquad A \Rightarrow B, A \vdash A}{A \Rightarrow B, A \vdash B}}{A \Rightarrow B, A \vdash \neg A \vee B}}{A \Rightarrow B \vdash (\neg A \vee B)}}{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)}$$

2ème séquent :

$$\Rightarrow_i *2\dfrac{\vee_e \dfrac{\neg A \vee B, A \vdash \neg A \vee B \qquad \bot_c \dfrac{\neg_e \dfrac{\neg A \vee B, A, \neg A, \neg B \vdash A \qquad \neg A \vee B, A, \neg A, \neg B \vdash \neg A}{\neg A \vee B, A, \neg A, \neg B \vdash \bot}}{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash B} \qquad A \Rightarrow B, A, B \vdash B}{(\neg A \vee B), A \vdash B}}{\vdash (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}$$

Exercice 2

Pour chacune des formules propositionnelles suivantes, déterminez s'il s'agit d'une tautologie. Si la formule est une tautologie, donnez une preuve en déduction naturelle. Si ce n'est pas le cas, donnez une interprétation qui rend la formule fausse.

1. $p \vee (p \Rightarrow p)$
2. $p \vee (q \Rightarrow p)$
3. $p \vee (p \Rightarrow q)$

p et q sont ici des variables propositionnelles.

Dans les deux arbres de dérivation ci-dessous, les feuilles non marquées par un nom de règle sont toutes des instances de l'axiome ax.

1. $p \vee (p \Rightarrow p)$ est une tautologie. On peut montrer que la formule est prouvable avec l'arbre suivant :

$$\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{\vdash (p \Rightarrow p)}\Rightarrow_i}{\vdash p \vee (p \Rightarrow p)}\vee id$$

2. La proposition $p \vee (q \Rightarrow p)$ n'est pas une tautologie car l'interprétation définie par $I(p) = 0$ et $I(q) = 1$ ne satisfait pas la formule.

3. $p \vee (p \Rightarrow q)$ est une tautologie. On peut montrer que la formule est prouvable avec l'arbre suivant :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash p \vee \neg p}TE \qquad \dfrac{p \vdash p}{p \vdash p \vee (p \Rightarrow q)}\vee ig \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p, p, \neg q \vdash \neg p \qquad \neg p, p, \neg q \vdash p}{\neg p, p, \neg q \vdash \bot}\neg_e}{\neg p, p \vdash q}\bot c}{\neg p \vdash p \Rightarrow q}\Rightarrow i}{\neg p \vdash p \vee (p \Rightarrow q)}\vee id}{\vdash p \vee (p \Rightarrow q)}\vee_e$$

Question de cours : quel est le théorème qui permet de répondre à la question *une formule est-elle une tautologie ?* par une preuve en déduction naturelle ?

Le théorème de complétude de la logique des propositions.

Exercice 3

Dans cet exercice, A et B sont des formules propositionnelles quelconques et Σ désigne un ensemble de formules propositionnelles.

1. Rappeler la définition de $\Sigma \models A$.

   Cette notation se lit *A est conséquence sémantique de* Σ. La définition dit que toute interprétation qui satisfait Σ (donc qui satisfait chacune des formules de Σ) satisfait la formule A.

2. Démontrer le lemme suivant :
   $\Sigma \models A \wedge B$ si et seulement si $\Sigma \models A$ et $\Sigma \models B$

   Sens direct : Soit I une interprétation qui satisfait Σ. D'après l'hypoth!èse elle satisfait $A \wedge B$. $I(A \wedge B = 1$ ssi $I(A) = 1 = I(B)$. Donc I satisfait A et I satisfait B. Et donc Σ satisfait A et Σ satisfait B (cqfd).

   Réciproque : Soit I une interprétation qui satisfait Σ. D'après l'hypothèse elle satisfait A et elle satisfait B. Donc elle satisfait $A \wedge B$. Donc Σ satisfait $A \wedge B$.

Exercice 4

On considère le texte suivant :

1. Pour que Toto réussisse l'examen de logique, il est nécessaire et suffisant que, premièrement, il assiste au cours, deuxièmement, il cesse de parler avec sa voisine, et finalement, qu'il écoute le professeur.

2. Mais si Toto écoute le professeur, c'est qu'il assiste au cours et cesse de parler avec sa voisine [1]
3. Donc il est nécessaire et suffisant que Toto écoute le professeur pour qu'il réussisse l'examen de logique.

- Formalisez ces 3 phrases en utilisant les variables propositionnelles définies ci-dessous et les seuls connecteurs $\neg$, $\Rightarrow$, $\wedge$ et $\vee$.
  - **re** Toto réussit l'examen de logique
  - **ac** Toto assiste au cours
  - **cp** Toto cesse de parler à sa voisine
  - **ep** Toto écoute le professeur

  F1 : $(re \Rightarrow (ac \wedge cp \wedge ep)) \wedge ((ac \wedge cp \wedge ep) \Rightarrow re)$
  F2 : $ep \Rightarrow (ac \wedge cp)$
  F3 : $(re \Rightarrow ep) \wedge (ep \Rightarrow re)$

- Montrez à l'aide d'une démonstration sémantique que le raisonnement informel précédent est valide. (Il s'agit donc de démontrer que la 3ème phrase est conséquence logique des deux autres).

  Vous pourrez utiliser le résultat de l'exercice précédent ainsi que d'autres résultats démontrés en cours (à la condition de les rappeler).

  On doit montrer que F3 est conséquence sémantique de F1 et F2. F3 est une conjonction, d'après l'exercice précédent on peut démontrer séparément que (1) $re \Rightarrow ep$ est conséquence sémantique de F1 et F2 et que (2) $ep \Rightarrow re$ est conséquence sémantique de F1 et F2.
  (1) : D'après un résultat du cours, $F1, F2 \models re \Rightarrow ep$ ssi $F1, F2, re \models ep$. Soit donc I une interprétation qui satisfait F1, F2 et re. Donc $I(re) = 1$. On a aussi $I(F1) = 1$ donc $I(re \Rightarrow (ac \wedge cp \wedge ep)) = 1$. Et donc $I(ac \wedge cp \wedge ep) = 1$ et donc $I(ep) = 1$, cqfd.
  (2) : De même que précédemment on va démontrer que $F1, F2, ep \models re$. Soit I une interpréttaion qui satisfait F1, F2 et ep. Puisqu'elle satisfait ep et F2, on en déduit qu'elle satisfait $ac \wedge cp$. Et donc elle satisfait $ac \wedge cp \wedge ep$. Comme elle satisfait F1, on en déduit qu'elle satisfait la 2ème sous-formule de F1 et donc re, cqfd.

Exercice 5

1. Donnez la définition d'un littéral.

   Un littéral est une variable ou la négation d'une variable.

2. Une forme clausale est une formule en forme normale conjonctive (FNC). Définissez inductivement l'ensemble des formes clausales.

   Une forme clausale est une conjonction de disjonctions (appelées clauses) de littéraux.

   Définition inductive de l'ensemble des clauses :

   - Un littéral est une clause
   - Si c est une clause et l un littéral, alors $c \vee l$ est une clause.

   Définition inductive de l'ensemble des formes clausales :

[1] Là, le rédacteur de l'exercice se fait des illusions

- Une clause est une forme clausale
- Si c est une clause et f une forme clausale, alors $c \wedge f$ est une forme clausale.

3. En vous appuyant sur cette dernière définition, écrivez la fonction qui compte le nombre de littéraux dans une forme clausale.

   Il faut définir deux fonctions récursives, une fonction qui compte le nombre de littéraux dans une clause et une autre qui compte le nombre de littéraux dans une forme clausale. Elles sont définies par cas sur la forme de l'argument.

   nblittC cl =
   si cl est un littéral alors 1
   si cl est de la forme $l \vee cl'$ alors 1 + nblittC cl'

   nblittFC f =
   si f est une clause alors nblittC f
   si f est de la forme $c \wedge f'$ alors nblitlC c + nblittFC f'

4. Metrre la formule $(\neg p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r)$ en forme clausale (FNC).

   $(\neg p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv$
   $(\neg p \wedge r) \vee (\neg q \vee r) \equiv$
   $(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (r \vee (\neg q \vee r)) \equiv$
   $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (r \vee \neg q)$

Rappel des règles de déduction naturelle :

(ax) $\quad \Delta, A \vdash A$

(aff) $$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta, B \vdash A}$$

$(\Rightarrow_i)$ $$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \Rightarrow B}$$

$(\Rightarrow_e)$ $$\frac{\Delta \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}$$

$(\wedge i)$ $$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}$$

$(\wedge e_g)$ $$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}$$

$(\wedge e_d)$ $$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}$$

$(\vee i_g)$ $$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}$$

$(\vee i_d)$ $$\frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}$$

$(\vee e)$ $$\frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}$$

$(\neg i)$ $$\frac{\Delta, A \vdash \bot}{\Delta \vdash \neg A}$$

$(\neg e)$ $$\frac{\Delta \vdash \neg A \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash \bot}$$

$(\bot_c)$ $$\frac{\Delta, \neg A \vdash \bot}{\Delta \vdash A}$$