Optimisation en informatique

ESP (Ecole Supérieure Polytechnique) de Dakar

Alain Faye

2 – résolution problème optimisation discrète

heuristique, modélisation

Résoudre un problème difficile

- Heuristique
- Programmation mathématique
- Bornes – garantie sur la qualité de la solution
- Illustration des concepts sur le problème de localisation

Heuristique

- rechercher une bonne solution admissible, non forcément optimale, en se laissant guider par « le bon sens ».
- On peut le faire via des **heuristiques** plus ou moins sophistiquées : les heuristiques **gloutonnes** sont une famille d'heuristiques « peu sophistiquées » mais rapides.

Heuristique gloutonne

- Choix successifs respectant les contraintes
- A chaque itération, choix le plus intéressant
- Les choix précédents ne sont jamais remis en cause
- Caractéristiques:
  - Simple
  - Rapide
  - Fourni une solution approchée (sous-optimale)

Localisation de concentrateurs (suite 1) : résolution par une heuristique gloutonne

Une idée : que se passe-t-il si un seul site est équipé ?

Dist. (km)	S1	S2	S3	S4
T1	1	2	1	4
T2	6	1	6	3
T3	6	2	3	1
T4	3	3	7	10
T5	4	5	3	2

	S1	S2	S3	S4
Coût instal. (en Keuros)	110	200	100	100

Coût d'un km de raccordement : 15 Keuros

Coût (S1) : 110 + 15(1+6+6+3+4) = 410

Coût (S2) : 200 + 15(2+1+2+3+5) = 395

Coût (S3) : 100 + 15(1+6+3+7+3) = 400

Coût (S4) : 100 + 15(4+3+1+10+2) = 400

==> Site le moins cher = S2 : on équipe donc S2.

==> Solution courante (de coût 395) : S2 équipé, les autres non.

Localisation de concentrateurs (suite 2) : résolution par une heuristique gloutonne

Maintenant que S2 est équipé, quel site ferait le plus baisser le coût total ?

Dist. (km)	S1	S2	S3	S4
T1	1	2	1	4
T2	6	1	6	3
T3	6	2	3	1
T4	3	3	7	10
T5	4	5	3	2

	S1	S2	S3	S4
Coût instal. (en Keuros)	110	200	100	100

Coût d'un km de raccordement : 15 Keuros

Coût (S2, S1) : 200 + 110 + 15(1+1+2+3+4) = 475

Coût (S2, S3) : 200 + 100 + 15(1+1+2+3+3) = 450

Coût (S2, S4) : 200 + 100 + 15(2+1+1+3+2) = 435

<u>Ainsi, aucun autre site ne peut améliorer la solution courante :</u>
==> **STOP**

Localisation de concentrateurs (suite 3) : résolution par une heuristique gloutonne

- Formalisation algorithmique de cette heuristique :

  - Trouver le site le moins cher lorsqu'il est le seul équipé
  - Stop = *faux*
  - Tant que (Stop = *faux*) faire
    - S'il existe, ajouter à la solution courante le site qui fait le plus baisser le coût total
    - Sinon, Stop = *vrai*
  - fin

Algorithme dit “*glouton*” (on ne revient jamais sur les choix précédemment effectués), de *complexité polynomiale*, et qu’il faut ensuite implémenter (coder) dans un *langage de programmation* (C, C++, JAVA, etc.).

Localisation de concentrateurs (conclusion): résolution par une heuristique gloutonne

- On a trouvé une solution 395 euros
- Questions
  – Quelle est la qualité de cette solution ?
  – Est-on loin du minimum ?
- Pour l'instant impossible d'y répondre
- Nécessité de bornes

Modèle mathématique

Il faut décrire :

- les données du problème (informations connues),

- ce qu’est une solution réalisable (variables dont on cherche à déterminer les valeurs + contraintes),

- s’il y a lieu, le coût d’une solution et donc l’objectif qu'on va chercher à optimiser (min ou max).

Exemple sac-à-dos

- Objets i=1,…,n
- Poids $a_i>0$ i=1,…,n
- Valeur $c_i>0$ i=1,…,n
- Capacité du sac b (poids max. qu'il peut supporter)
- Remplir le sac en respectant la contrainte de capacité et en maximisant la valeur totale des objets emportés dans le sac

Exemple sac-à-dos

Objets i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Poids a_i	10	8	15	12	7
Valeurs c_i	50	40	70	60	36

b= 35

Quelques solutions

Objets 1,2,3 valeur totale = 50+40+70 = 160

Objets 3,4,5 valeur totale = 70+60+36 = 166

Exemple sac-à-dos

- Variables
  - décision sur chaque objet non-oui ⇔ 0-1
- Contrainte
  - Respecter la capacité
- Objectif
  - Maximiser la valeur emportée

Localisation de concentrateurs : formulation par un programme mathématique

Description d’une solution réalisable ?

On cherche à :

- localiser des concentrateurs sur certains sites,
- affecter chaque client à un site équipé d'un concentrateur.

Coût d’une solution ?

Somme des coûts d’installation des concentrateurs et de raccordement des clients aux sites (à minimiser).

Localisation de concentrateurs (suite 1): formulation par un programme mathématique

- **Choix des variables**

y_j = 1 si un concentrateur est installé sur le site Sj

= 0 sinon

Ainsi : 4 variables y_1, y_2, y_3 et y_4

x_{ij} = 1 si le terminal Ti est raccordé au site Sj

= 0 sinon

Ainsi : 20 variables x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22} ... et x_{54}

L'ensemble des valeurs de ces variables décrivent toutes les possibilités !

Localisation de concentrateurs (suite 1): formulation par un programme mathématique

Exemple : solution où un concentrateur est installé sur le site 2

$y_1 = 0$, $\boldsymbol{y_2 = 1}$, $y_3 = 0$ $y_4 = 0$

$x_{12} = 1, x_{22} = 1, x_{32} = 1, x_{42} = 1, x_{52} = 1$

$x_{i1} = x_{i3} = x_{i4} = x_{i5} = 0 \;\; \forall\, i$=1,…,5

Localisation de concentrateurs (suite 2): formulation par un programme mathématique

- **Contraintes linéaires**

Contrainte d'affectation de chaque terminal à 1 site

T1 est raccordé à exactement 1 site

T2 est raccordé à exactement 1 site

…

T_i est raccordé à exactement 1 site

Localisation de concentrateurs (suite 2): formulation par un programme mathématique

Contrainte d'affectation de chaque terminal à 1 site

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{14} = 1$$ T1 est raccordé à exactement 1 site

$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{24} = 1$$ T2 est raccordé à exactement 1 site

… T_i est raccordé à exactement 1 site

Localisation de concentrateurs (suite 2): formulation par un programme mathématique

Contraintes liant variables x et y

Plusieurs façons possibles

Formulation compacte : m contraintes

T1,…,Tn raccordables à S1 que si un concentrateur s'y trouve

T1,…,Tn raccordables à S2 que si un concentrateur s'y trouve

…

T1,…,Tn raccordables à Sj que si un concentrateur s'y trouve

Localisation de concentrateurs (suite 2): formulation par un programme mathématique

Contraintes liant variables x et y

Plusieurs façons possibles

Formulation compacte : m contraintes

$x_{11} + \cdots + x_{n1} \leq n y_1$ T1,…,Tn raccordables à S1 que si un concentrateur s'y trouve

$x_{12} + \cdots + x_{n2} \leq n y_2$ T1,…,Tn raccordables à S2 que si un concentrateur s'y trouve

… T1,…,Tn raccordables à Sj que si un concentrateur s'y trouve

Localisation de concentrateurs (suite 2): formulation par un programme mathématique

Contraintes liant variables x et y

Plusieurs façons possibles

Formulation étendue : nm contraintes

T1 raccordable à S1 que si un concentrateur s'y trouve

T2 raccordable à S1 que si un concentrateur s'y trouve

…

T_i raccordable à S_j que si un concentrateur s'y trouve

Localisation de concentrateurs (suite 2): formulation par un programme mathématique

Contraintes liant variables x et y

Plusieurs façons possibles

Formulation étendue : nm contraintes

$x_{11} \leq y_1$ T1 raccordable à S1 que si un concentrateur s'y trouve

$x_{21} \leq y_1$ T2 raccordable à S1 que si un concentrateur s'y trouve

… T_i raccordable à S_j que si un concentrateur s'y trouve

Localisation de concentrateurs (suite 3): formulation par un programme mathématique

- **Coût d'une solution (en Keuros) :**

$$110y_1 + 200y_2 + 100y_3 + 100y_4$$

Coût d'installation des concentrateurs sur les sites

+

$$15(1x_{11} + 2x_{12} + 1x_{13} + 4x_{14} + 6x_{21} + \cdots + 2x_{54})$$

Coût de raccordement des terminaux aux sites

On veut trouver une solution de coût minimum : on va donc **minimiser** la **fonction objectif**

Localisation de concentrateurs (bilan): formulation par un programme mathématique

- On a obtenu 2 *programmes mathématiques*
  - *programme linéaire (contraintes et objectif linéaires)*
  - *en variables 0-1 (les 2 valeurs possibles pour chaque variable)*
- **Résoudre** ce programme revient à **associer des valeurs aux variables** qui :
  - Satisfont les contraintes,
  - Minimisent la fonction objectif.

Localisation de concentrateurs (bilan): formulation par un programme mathématique

- Pour **résoudre**, on dispose de méthodes algorithmiques : algorithmes pour la programmation linéaire et la programmation linéaire en nombres entiers (cf suite du cours)

- Qui sont implémentées dans des **solveurs** (logiciels de résolution)

Voyons une façon de faire en utilisant le logiciel libre GLPK

Localisation de concentrateurs (bilan): formulation par un programme mathématique

- 2 programmes mathématiques en 0-1
- Lequel est le plus rapide ?
- Différence visible sur les grosses instances
- Facteurs importants:
  - Taille du programme en nombre de variables et de contraintes
  - Relaxation continue : relaxation de l'intégrité des variables

Bornes

- Pour un problème de minimisation difficile
- Résolution par une heuristique
- Qualité de la solution ?
  - Une borne inférieure permet de savoir si on est proche ou pas de la solution optimale inconnue
  - Borne inférieure de calcul facile, rapide
  - Si possible, avoir borne inférieure de bonne qualité (haute) pour avoir une bonne approximation

Bornes

Problème de minimisation : min f(x)

S   solution rendue par une heuristique

Est-elle de bonne qualité ?

Bornes

Calcul d’une borne inférieure

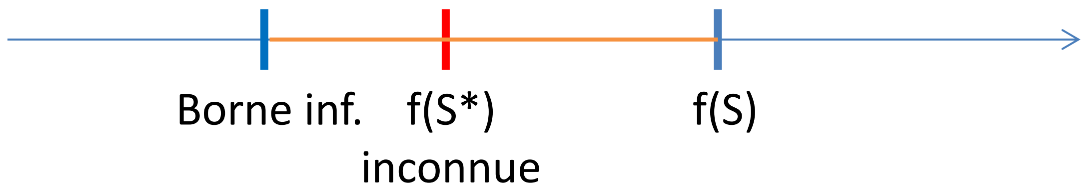
S   solution rendue par une heuristique

Borne inf. minorant de f(S*)

S* sol. optimale inconnue

On sait dans quel intervalle se trouve f(S*)

Bornes



S solution rendue par une heuristique
Borne inf. minorant de f(S*)
S* sol. optimale inconnue

Comment calculer une borne inf.

- Si on a un modèle mathématique en variables 0-1 ou entières, pour décrire notre problème
- La relaxation continue du modèle est une borne inférieure
- De plus, si c'est un modèle linéaire la relaxation continue se calcule rapidement (cf algorithme du simplexe dans la suite)

Borne inf. pour la localisation de concentrateurs

Formulation compacte

- On peut résoudre la relaxation continue à l'aide d'une formule fermée et d'un algorithme linéaire

<u>Exercice</u>: donner cette formule fermée et la tester sur l'exemple

Formulation étendue

- Utiliser un solveur pour résoudre la relaxation continue (GLPK)

Conclusion

- Problème NP-difficile résolution heuristique
- Modèle mathématique : résolution exacte.
  - Solveurs : GLPK, Cplex, XpressMP, …
  - Si pb NP-difficile taille des instances limitée
- Relaxation continue = borne inférieure
  - Garantie pour une solution heuristique
  - Utile pour la résolution exacte par procédure arborescente (Branch&Bound) . cf la suite