Programmation Dynamique

ESP (Ecole Supérieure Polytechnique) de Dakar

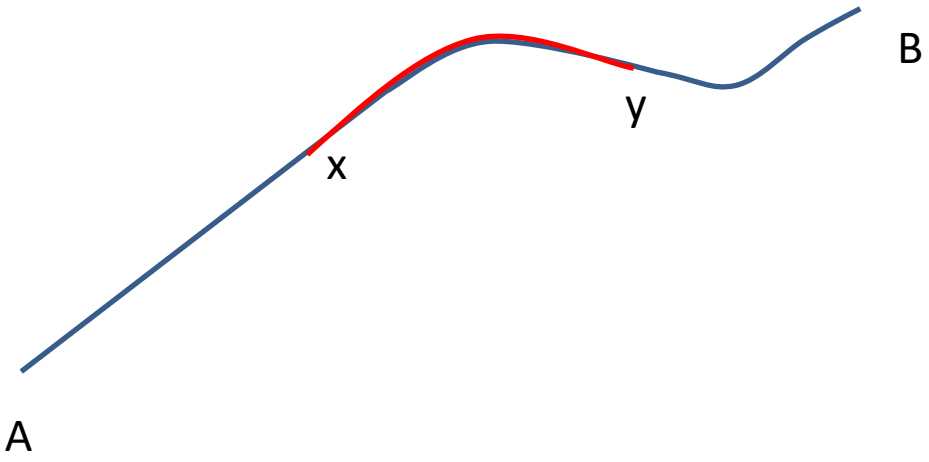
Optimisation en informatique

Alain Faye

3 – Programmation dynamique

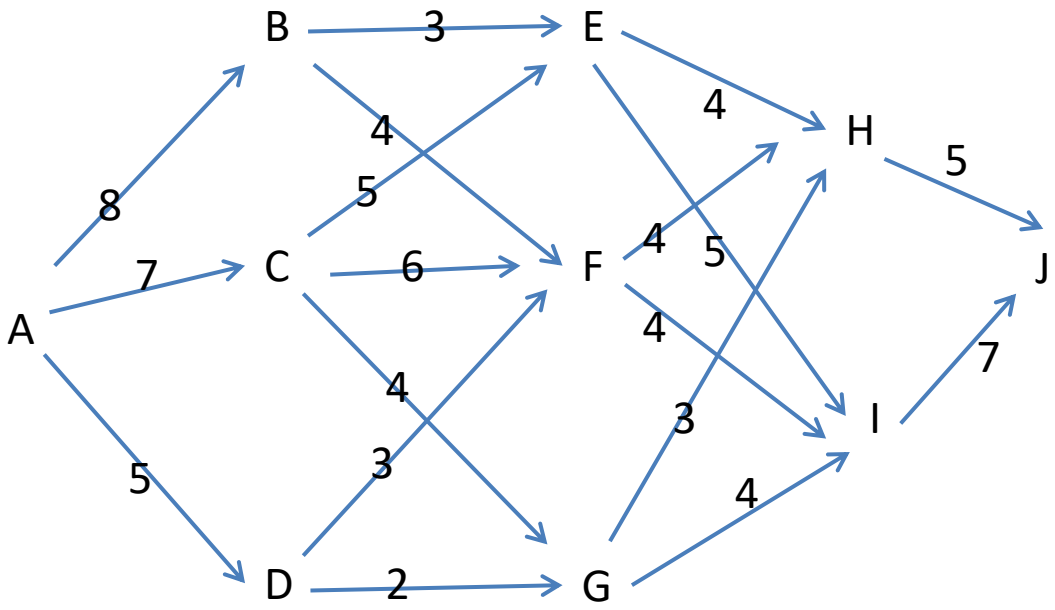
Principe général

« Toute sous-solution d'une solution optimale est optimale »

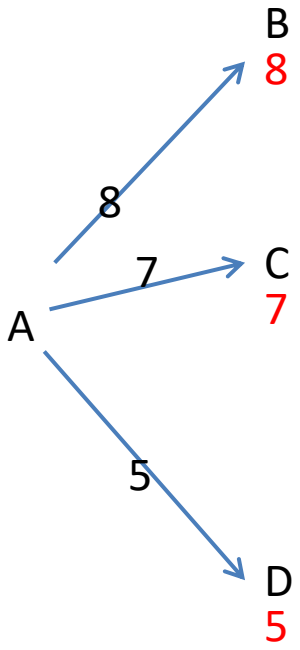


Chemin optimal de A à B . Forcément le sous-chemin rouge de x à y est optimal

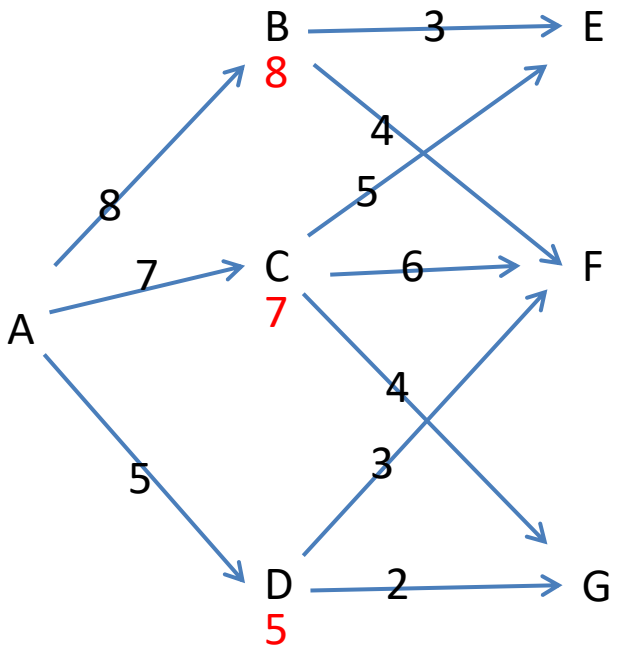
Cheminement dans un graphe sans circuit



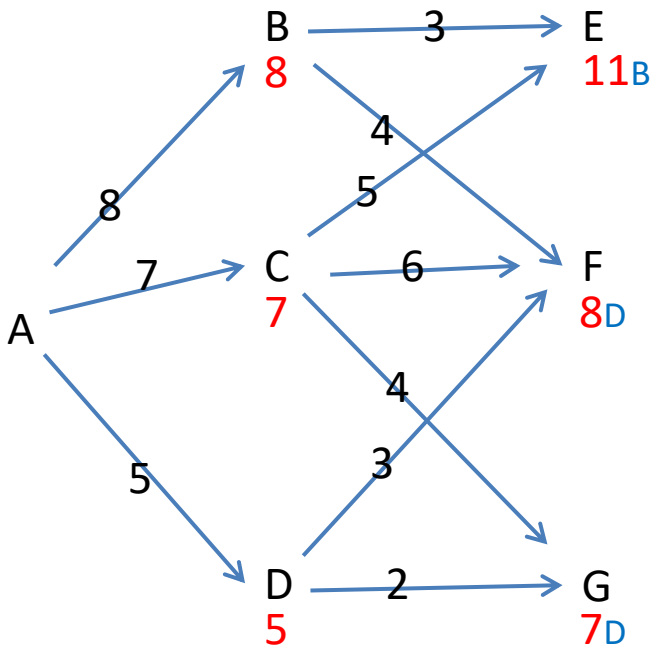
Cheminement dans un graphe sans circuit : étape 1



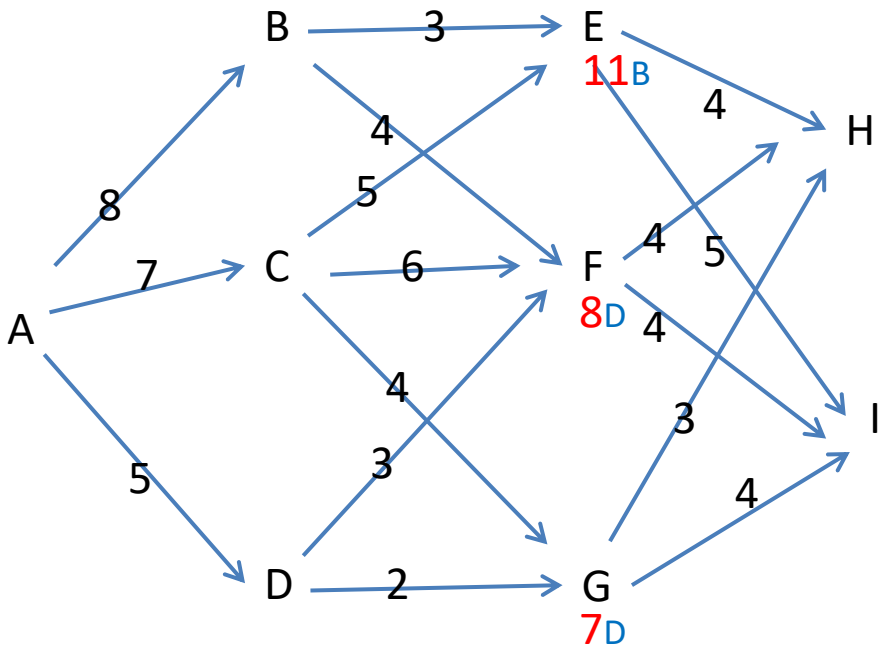
Cheminement dans un graphe sans circuit : étape 2



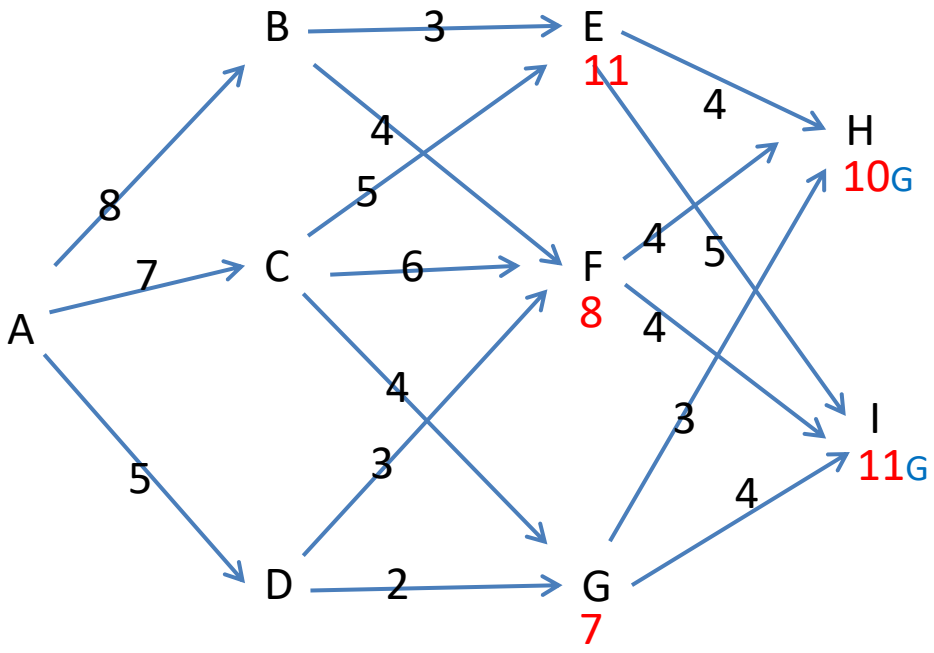
Cheminement dans un graphe sans circuit : étape 2



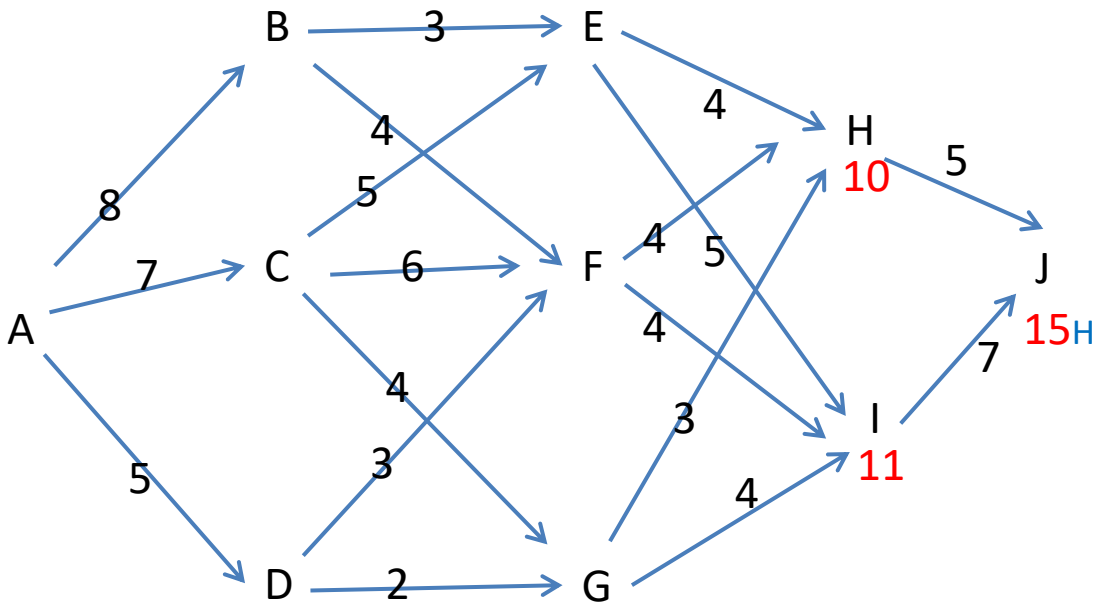
Cheminement dans un graphe sans circuit : étape 3



Cheminement dans un graphe sans circuit : étape 3

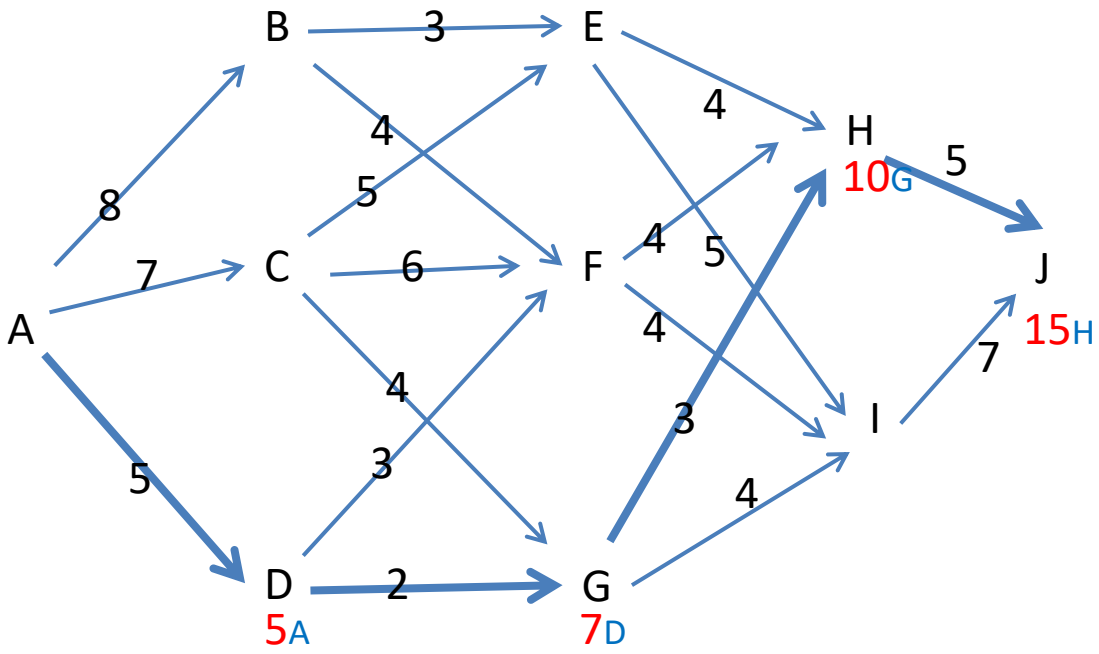


Cheminement dans un graphe sans circuit : étape 4



Valeur optimale 15

Retrouver le chemin optimal



Généralisation-Problème séquentiel

$$\min F(x_1, \dots, x_n) = v_1(x_1) + v_2(x_1, x_2) + \cdots + v_n(x_{n-1}, x_n)$$

s.c. $x_{i-1} \in Dom_{i-1}(x_i)$ i=2,…,n

Hypothèse: le domaine de x_{i-1} ne dépend que de x_i

Sous cette hypothèse, on peut résoudre le problème progressivement étape par étape pour i allant de 1 à n

Étape i=1

$f_1(x_1) = v_1(x_1)$ étape i=1

Étape i=2

$f_1(x_1) = v_1(x_1)$ étape i=1

$f_2(x_2) = \min_{x_1 \in Dom_1(x_2)} f_1(x_1) + v_2(x_1, x_2)$ étape i=2

Étape i=3

$f_1(x_1) = v_1(x_1)$ étape i=1

$f_2(x_2) = \min_{x_1 \in Dom_1(x_2)} f_1(x_1) + v_2(x_1, x_2)$ étape i=2

$f_3(x_3) = \min_{x_2 \in Dom_2(x_3)} f_2(x_2) + v_3(x_2, x_3)$ étape i=3

Étape i=n

$f_1(x_1) = v_1(x_1)$ étape i=1

$f_2(x_2) = \min_{x_1 \in Dom_1(x_2)} f_1(x_1) + v_2(x_1, x_2)$ étape i=2

$f_3(x_3) = \min_{x_2 \in Dom_2(x_3)} f_2(x_2) + v_3(x_2, x_3)$ étape i=3

$\vdots$

$f_n(x_n) = \min_{x_{n-1} \in Dom_{n-1}(x_n)} f_{n-1}(x_{n-1}) + v_n(x_{n-1}, x_n)$ étape i=n

Étape finale

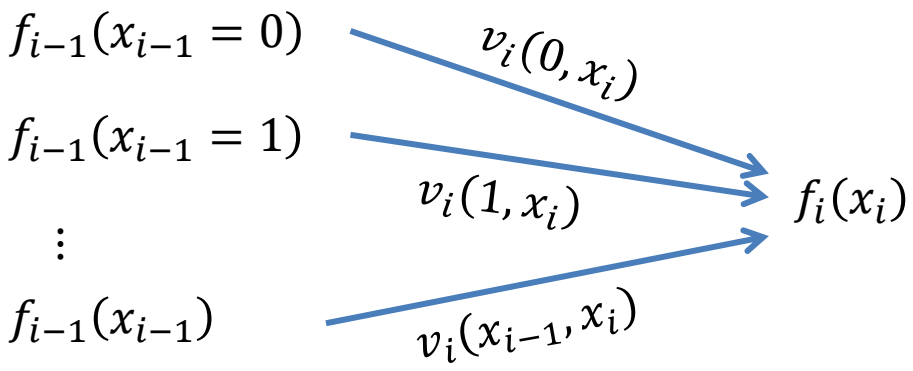
Il ne reste plus qu'à résoudre

$$\min_{x_n} f_n(x_n)$$

Cheminement optimal dans un graphe

Lorsque les variables sont discrètes (nombres entiers)
On peut voir la résolution du problème comme le cheminement optimal dans un graphe arc-valué

Sommets représentent $f_i(x_i)$ pour chaque valeur de x_i
Arcs $f_{i-1}(x_{i-1}) \rightarrow f_i(x_i)$ valué par $v_i(x_{i-1}, x_i)$



Exemple

Un champ est divisé en 4 parcelles I, II, III, IV. Les cultures sont infectées et cela cause des pertes de revenus. On va faire un épandage de produit de façon à assainir et minimiser les pertes. Le produit est répandu à l'aide d'une machine.
Le tableau ci-dessous donne les pertes escomptées en fonction du nombre de jours d'épandage pour chaque parcelle.
Si on ne fait rien on va perdre 78+65+50+43=236. Si on utilise la machine pendant 4 jours sur une même parcelle la perte sera nulle.
Hélas, on dispose de la machine pendant 4 jours seulement et
la machine traite une parcelle par jour.
Sur quelles parcelles doit-on mettre la machine et pendant combien de temps
de façon à minimiser les pertes ?

nombre jours	I	II	III	IV
0	78	65	60	63
1	65	55	40	37
2	45	41	25	30
3	28	25	15	20
4	0	0	0	0

Exemple – modélisation naturelle

Choix des variables
y_i = nombre de jours utilisation machine pour la parcelle i

$v_i(y_i)$ = colonne i de la table

Le problème s'écrit:

$$\min v_1(y_1) + v_2(y_2) + v_3(y_3) + v_4(y_4)$$

s.c. $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 4 \; et \; y_i \in \mathbb{N} \; i = 1, \dots, 4$

le domaine de y_{i-1} ne dépend pas que de y_i mais aussi de y_{i+1}, y_{i+2},…

Exemple – autre modélisation

Choix des variables :
x_i = nombre de jours utilisation machine pour les parcelles de 1 à i.

Sur la parcelle i, la machine est utilisée $x_i - x_{i-1}$ jours
$v_i(x_i - x_{i-1})$ = colonne i de la table

Le problème s'écrit:

$$\min v_1(x_1) + v_2(x_2 - x_1) + v_3(x_3 - x_2) + v_4(x_4 - x_3)$$

s.c. $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 4 \; et \; x_i \in \mathbb{N} \; i = 1, \dots, 4$

le domaine de x_{i-1} est fixée par x_i : $x_{i-1} \leq x_i$

Etape i=1

$f_1(x_1) = v_1(x_1)$ étape i=1

Nb jours	f1
0	78
1	65
2	45
3	28
4	0

Étape i=2

$$f_2(x_2) = \min_{x_1 \leq x_2} f_1(x_1) + v_2(x_2 - x_1)$$ étape i=2

nb jours	II
0	65
1	55
2	41
3	25
4	0

Nb jours	f1	f2	
0	78	143 (x1=0)	78+65
1	65	130 (x1=1)	min{78+55 ; 65+65}
2	45	110 (x1=2)	min{78+41 ; 65+55 ; 45+65}
3	28	93 (x1=3)	min{78+25 ; 65+41 ;45+55 ; 28+65}
4	0	65 (x1=4)	min{78+0 ; 65 +25; 45+41 ; 28 +55; 0 +65 }

Étape i=3

$$f_3(x_3) = \min_{x_2 \leq x_3} f_2(x_2) + v_3(x_3 - x_2)$$ étape i=3

nb jours	III
0	60
1	40
2	25
3	15
4	0

Nb jours	f1	f2	f3
0	78	143 (x1=0)	203 (x2=0)
1	65	130 (x1=1)	183 (x2=0)
2	45	110 (x1=2)	168 (x2=0)
3	28	93 (x1=3)	150 (x2=2)
4	0	65 (x1=4)	125 (x2=4)

Étape i=4

$$f_4(x_4) = \min_{x_3 \leq x_4} f_3(x_3) + v_4(x_4 - x_3)$$ étape i=4

nb jours	IV
0	63
1	37
2	30
3	20
4	0

Nb jours	f1	f2	f3	f4
0	78	143 (x1=0)	203 (x2=0)	
1	65	130 (x1=1)	183 (x2=0)	
2	45	110 (x1=2)	168 (x2=0)	
3	28	93 (x1=3)	150 (x2=2)	
4	0	65 (x1=4)	125 (x2=4)	187 (x3=3)

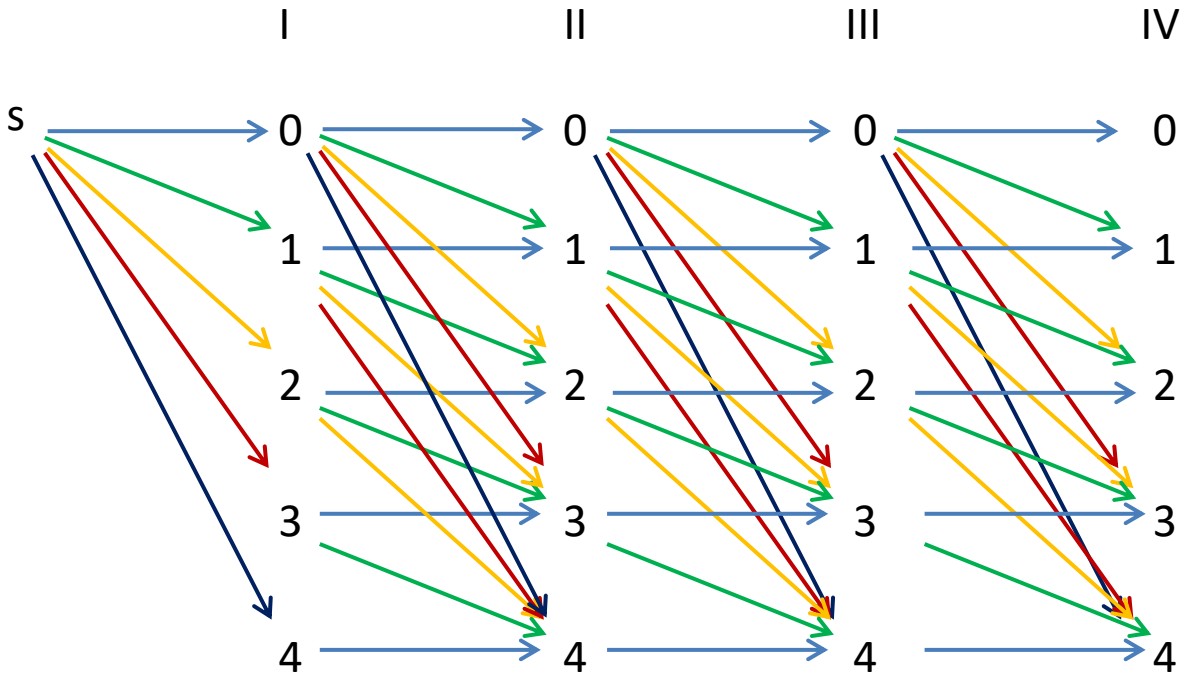
Retrouver la solution

Nb jours	f1	f2	f3	f4
0	78	143 (x1=0)	203 (x2=0)	
1	65	130 (x1=1)	183 (x2=0)	
2	45	110 (x1=2)	168 (x2=0)	
3	28	93 (x1=3)	150 (x2=2)	
4	0	65 (x1=4)	125 (x2=4)	187 (x3=3)

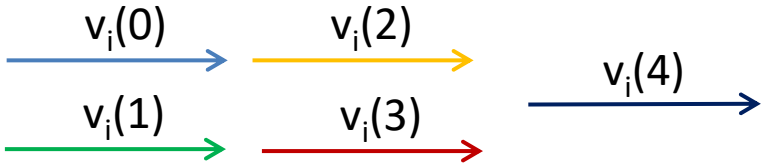
x4=4 ; x3=3 ; x2=2 ; x1=2

x4-x3=1 jour sur parcelle IV 37
x3-x2=1 jour sur parcelle III 40
x2-x1=0 jours sur parcelle II 65
x1=2 jours sur parcelle I 45
total = 187

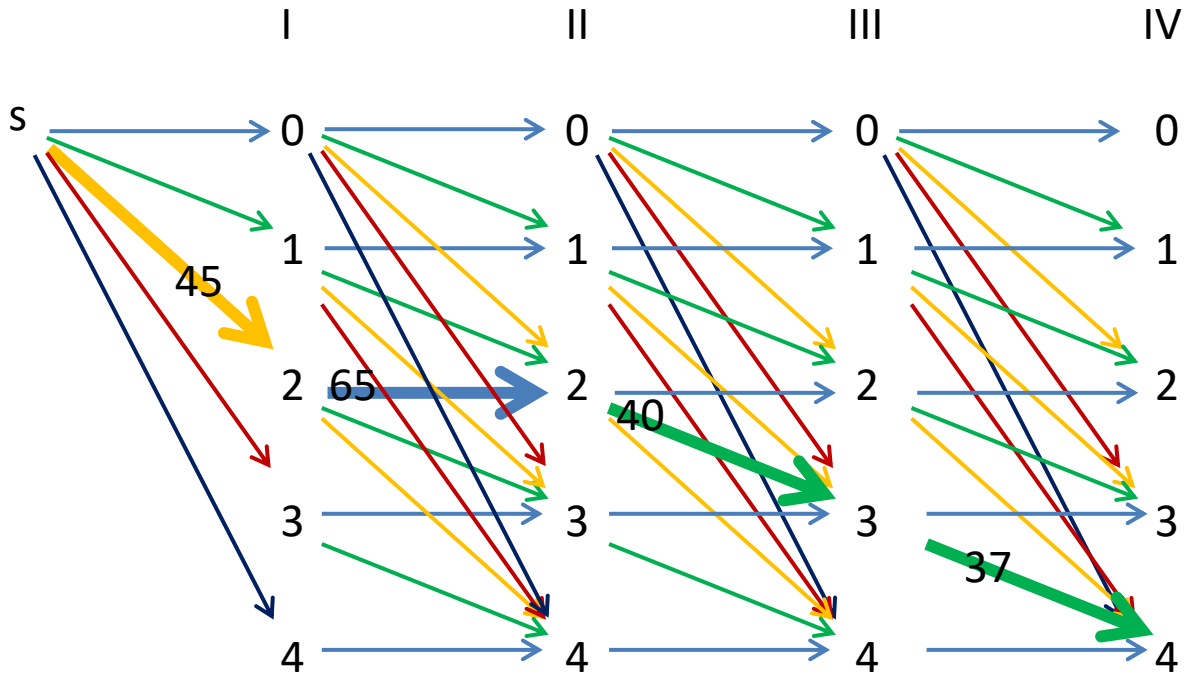
Représentation par un graphe



Valeurs arcs



Cheminement optimal



Exercices

- Problème de l'argent de poche
- Sac-à-dos en variables 0-1
- Placement d'une somme S.
  - Si la somme n'est pas placée au slot i, on en dispose au slot i+1
  - Si la somme est placée au slot i, elle est multipliée par a_i mais on ne peut récupérer la somme et son gain que sur le slot i+2

Conclusion

- Méthode qui peut donner des algorithmes efficaces (polynomiaux)
- Elle fournit des algorithmes pseudo-polynomiaux (dont la complexité dépend de la taille des données) sur les problèmes difficiles comme le sac-à-dos
- Il est parfois difficile de trouver la bonne formulation qui permet de séquentialiser le problème (cf le pb sur les parcelles de champ, l'argent de poche)