

Programmation Linéaire

ESP (Ecole Supérieure Polytechnique) de Dakar

Optimisation en informatique

Alain Faye

4 – Programmation linéaire

Un exemple

Un brasseur fabrique 2 types de bières : blonde et brune.

3 ingrédients : maïs , houblon , malt.

Quantités requises par unité de volume:

Bière blonde: 2,5 kg de maïs, 125 g de houblon, 17,5 kg de malt

Bière brune : 7,5 kg de maïs, 125 g de houblon, 10 kg de malt

Le brasseur dispose de 240 kg maïs, 5 kg houblon , 595 kg malt

Prix vente par u.v. : blonde 15 euros , brune 20 euros

Le brasseur veut maximiser son revenu .

Quelle quantité de bières blondes et/ou brunes doit-il produire pour cela ?

Modélisation

Variables

$x_1 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière blonde

$x_2 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière brune

Le revenu (à maximiser)

$$z = 15 x_1 + 20 x_2$$

Modélisation

Variables

$x_1 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière blonde

$x_2 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière brune

Le revenu (à maximiser)

$$z = 15 x_1 + 20 x_2$$

Les contraintes : limite en matières premières maïs , houblon , malt

Modélisation

Variables

$x_1 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière blonde

$x_2 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière brune

Le revenu (à maximiser)

$$z = 15 x_1 + 20 x_2$$

Les contraintes : limite en matières premières maïs , houblon , malt

$$2,5 x_1 + 7,5 x_2 \leq 240 \quad (\text{maïs})$$

$$0,125 x_1 + 0,125 x_2 \leq 5 \quad (\text{houblon})$$

$$17,5 x_1 + 10 x_2 \leq 595 \quad (\text{malt})$$

Une solution

Variables

$x_1 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière blonde

$x_2 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière brune

Le revenu (à maximiser)

$$z = 15 x_1 + 20 x_2$$

Les contraintes : limite en matières premières maïs , houblon , malt

$$2,5 x_1 + 7,5 x_2 \leq 240 \quad (\text{maïs})$$

$$0,125 x_1 + 0,125 x_2 \leq 5 \quad (\text{houblon})$$

$$17,5 x_1 + 10 x_2 \leq 595 \quad (\text{malt})$$

Une solution:

$$x_1 = 12 \quad z = 740 \text{ optimal ?}$$

$$x_2 = 28$$

Résolution d'un PL

- 2 variables : résolution graphique
- $n \geq 2$ variables : algorithme du simplexe

Un peu d'analyse

développement d'une fonction f autour d'un point $x^{(0)}$

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \nabla f(x^{(0)}) \bullet (x - x^{(0)}) + \dots$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ gradient de } f$$

Cas f linéaire:

$$f(x) = cx = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$cx = cx^{(0)} + c(x - x^{(0)})$$

Direction de déplacement

On considère f linéaire : $f(x) = cx$

A partir de $x^{(0)}$ on se déplace dans une direction d : $x = x^{(0)} + \alpha d$ $\alpha \geq 0$

$$c(x^{(0)} + \alpha d) = cx^{(0)} + \alpha c \bullet d$$

- Si $d = c =$ gradient de f

$$c(x^{(0)} + \alpha c) = cx^{(0)} + \alpha c \bullet c = cx^{(0)} + \alpha \|c\|^2$$

La valeur de la fonction augmente quand on s'éloigne de $x^{(0)}$

- Si $d = -c =$ opposé du gradient de f

$$c(x^{(0)} - \alpha c) = cx^{(0)} - \alpha c \bullet c = cx^{(0)} - \alpha \|c\|^2$$

La valeur de la fonction diminue quand on s'éloigne de $x^{(0)}$

Exemple

Soit $f(x) = x_1 + 2x_2$

Le point $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Déplacement dans le sens du gradient $d = \nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$x^{(0)} + \alpha d = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(x^{(0)} + \alpha d) = \alpha + 2(2\alpha) = 5\alpha$$

- Déplacement dans le sens opposé au gradient $d = -\nabla f = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$x^{(0)} + \alpha d = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

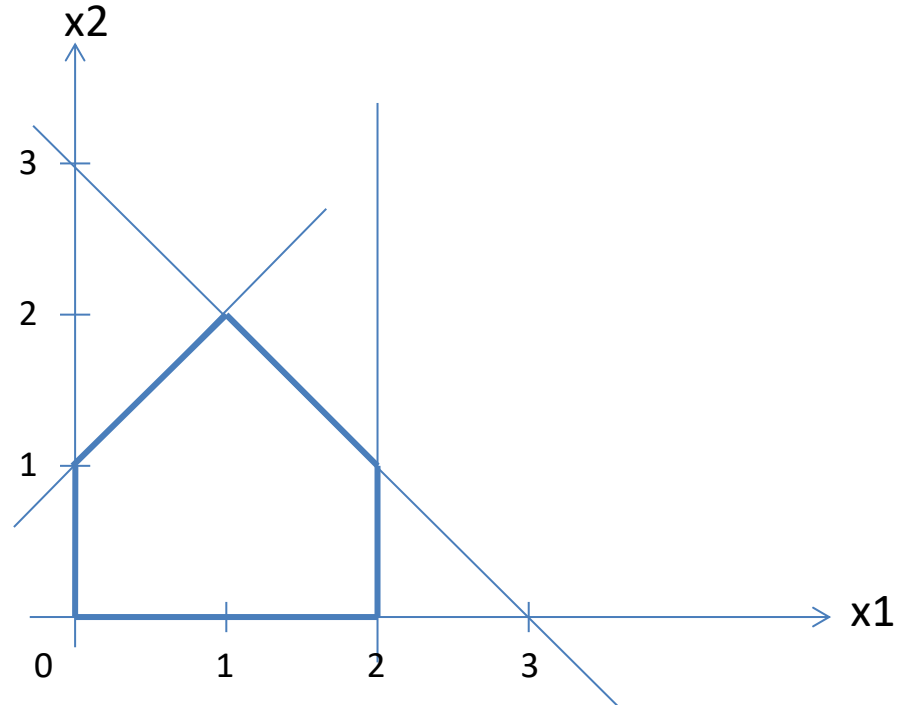
$$f(x^{(0)} + \alpha d) = -\alpha + 2(-2\alpha) = -5\alpha$$

Résolution graphique d'un PL

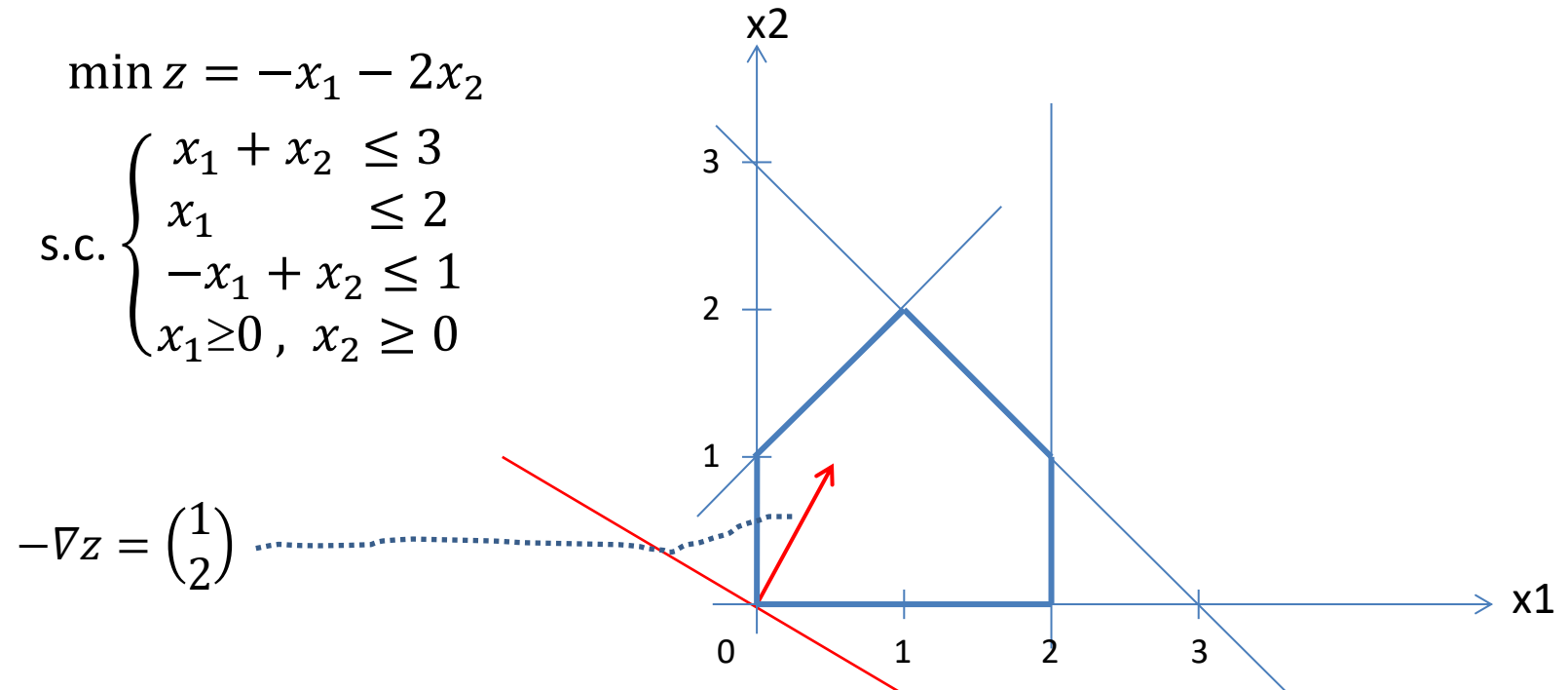
$$\begin{array}{ll} \min z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On trace l'ensemble des solutions réalisables

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c. } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



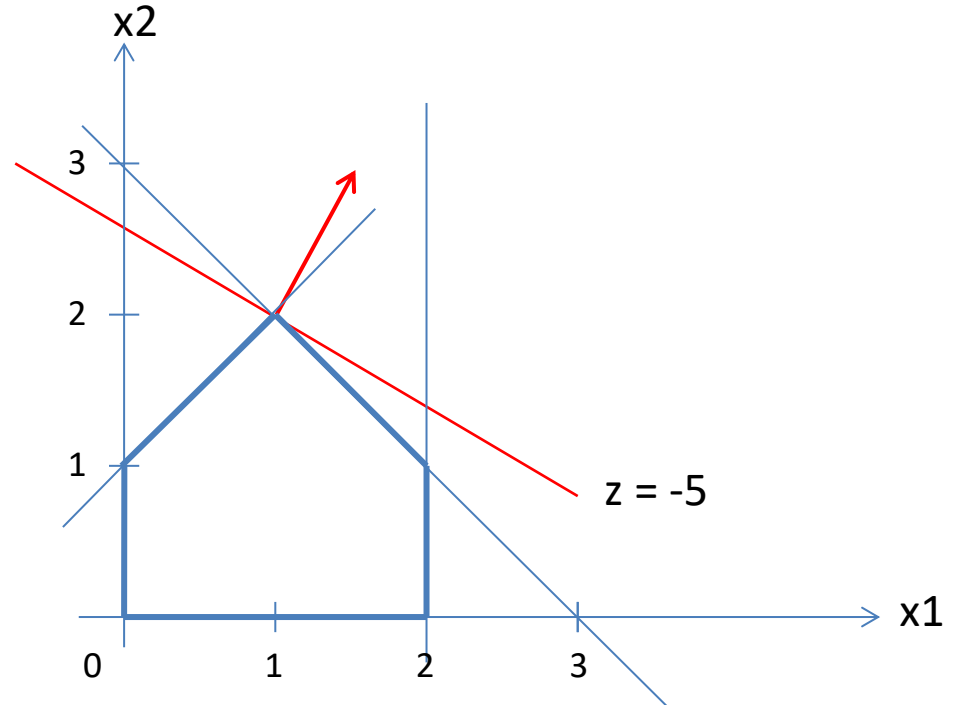
On minimise l'objectif z sur le domaine tracé



L'opposé du gradient de z est une direction de descente
Pour minimiser pousser la droite $z=0$
dans la direction opposée au gradient de z

Déplacement maximum en restant dans le domaine

$$\begin{array}{ll} \min z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$



pousser au maximum en restant dans le domaine

Le dernier point = $(1, 2)$

D'où $z = -5$

Bilan de la résolution graphique

- On se déplace selon une direction de descente (si on minimise)
- Direction de montée si on maximise
- L'optimum est atteint en un point extrême du domaine (l'ensemble des solutions réalisables)
- Pratique pour $n=2$ variables
- Pour $n=3$ faire des dessins en 3 dimensions
- et $n \geq 4$?

Algorithme du simplexe

- Mise sous forme standard
- Base , solution de base
- Critère d'optimalité d'une solution de base
- Déplacement d'une solution de base à une autre
- Méthode des tableaux : disposition pratique des calculs
- Recherche d'une base initiale: méthode des 2 phases

Forme standard

$$\min z = cx \text{ s.c. } Ax = b, x \geq 0$$

On se ramène à la forme standard en rajoutant des variables d'écart

$$\begin{array}{ll} \min z = -x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.c. } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \min z = -x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.c. } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} & \end{array} \end{array}$$

Base, solution de base

m contraintes , n variables $m < n$

B matrice carrée (m lignes m colonnes) formée de colonnes de A

B inversible

Quitte à permuter des colonnes, A se décompose en 2 matrice B et N $A = [B \ N]$

x_B variables de base , x_N variable hors-base

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Variables de base x_3, x_4, x_5 , hors-base x_1, x_2

$$B = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il y a de nombreuses bases possibles

Solution de base

x_B variables de base , x_N variable hors_base

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

Solution de base:

on fixe $x_N = 0$, alors $x_B = B^{-1}b$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = 0$ alors solution unique

$$x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 1$$

Coûts réduits

x_B variables de base , x_N variable hors_base

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

fonction z s'écrit : $z = cx \Leftrightarrow z = c_Bx_B + c_Nx_N$

On exprime z en fonction de x_N uniquement en éliminant x_B :

$$z = c_B (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_Nx_N = c_B (B^{-1}b) + (c_N - c_B B^{-1}N) x_N$$

Coûts réduits = coefficients des variables hors-base = $c_N - c_B B^{-1}N$

$$z = -x_1 - 2x_2$$

Variables de base x_3, x_4, x_5 , hors-base x_1, x_2

$c_3 = 0$ $c_4 = 0$ $c_5 = 0$, hors-base $c_1 = -1$ $c_2 = -2$

coûts réduits = $c_N - c_B B^{-1}N = [-1 \ -2]$

Sol. de base n°1 : var. en base x_3, x_4, x_5

Optimum atteint ?

On est sur la solution de base

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 1$$

$$\text{et } z = -x_1 - 2x_2 = 0$$

On voit que si on augmente x_2 (de coefficient -2) la valeur de z va diminuer.

De combien peut-on l'augmenter ? Il faut que les variables restent ≥ 0

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On voit sur le système que la valeur max est 1
(par la 3^e contrainte)

Et quand $x_2=1$ nécessairement $x_5=0, x_3=2, x_4=2$

Ce point est une autre solution de base:
variables de base $x_2=1, x_3=2, x_4=2$,
hors base $x_1=0, x_5=0$

Et $z = -2$

Sol. de base n°2 : var. en base x_2, x_3, x_4

Optimum atteint ?

Calculons les coûts réduits pour la nouvelle base: variables en base x_2, x_3, x_4
c'est-à-dire exprimons z en fonction des variables hors-base x_1, x_5

Pour cela exprimons d'abord les variables de base en fonction des hors-base

$$B = \begin{pmatrix} \overset{x_3}{1} & \overset{x_4}{0} & \overset{x_2}{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1}N = \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne le système:
$$\begin{cases} 2x_1 & + \overset{x_3}{x_3} & -x_5 = 2 \\ x_1 & & + \overset{x_4}{x_4} = 2 \\ -x_1 & \overset{x_2}{x_2} & + x_5 = 1 \end{cases}$$

Ensuite on exprime z en fonction des variables hors-base donc on remplace

$$\overset{x_2}{x_2} = 1 - x_5 + x_1 \text{ (dernière ligne) et } z = -x_1 - 2(1 - x_5 + x_1) = -2 - 3x_1 + 2x_5$$

$$z = -2 \text{ sur la sol. de base } x_2=1, x_3=2, x_4=2, x_1=0, x_5=0$$

Sol. de base n°2 : var. en base x_2, x_3, x_4 Optimum non atteint

On a le système:
$$\begin{cases} 2x_1 & + x_3 & -x_5 = 2 \\ x_1 & & + x_4 = 2 \\ -x_1 & x_2 & + x_5 = 1 \end{cases}$$

z en fonction des variables hors-base $z = -2 - 3x_1 + 2x_5$

On voit que si on augmente x_1 (de coefficient -3) la valeur de z va diminuer.
De combien peut-on l'augmenter ? Les variables doivent rester ≥ 0

On voit sur le système que la valeur max est 1 (première équation)
Et quand $x_1=1$ nécessairement $x_3=0, x_4=1, x_2=2$

Ce point est une autre solution de base:
variables de base $x_1=1, x_2=2, x_4=1$,
hors base $x_3=0, x_5=0$
Et $z = -5$

Sol. de base n°3 : var. en base x_1, x_2, x_4

Optimum atteint ?

Calculons les coûts réduits pour la nouvelle base: variables en base x_1, x_2, x_4
c'est-à-dire exprimons z en fonction des variables hors-base x_3, x_5

Pour cela exprimons d'abord les variables de base en fonction des hors-base

$$B = \begin{pmatrix} \overset{x_1}{1} & \overset{x_4}{0} & \overset{x_2}{1} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} x_3 & x_5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ce qui donne le système:} \begin{cases} \overset{x_1}{+ \frac{x_3}{2}} - \frac{x_5}{2} = 1 \\ -\frac{x_3}{2} + \overset{x_4}{+ \frac{x_5}{2}} = 1 \\ \overset{x_2}{+ \frac{x_3}{2}} + \frac{x_5}{2} = 2 \end{cases}$$

Ensuite on exprime z en fonction des variables hors-base donc on remplace

$\overset{x_1}{x_1} = 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$ (première ligne) $\overset{x_2}{x_2} = 2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$ (dernière ligne)

et $z = -(1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5) - 2(2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5) = -5 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$

$z = -5$ sur la sol. de base $x_1=1, x_2=2, x_4=1, x_3=0, x_5=0$

Sol. de base n°3 : var. en base x_1, x_2, x_4
Optimum atteint

$$z = -5 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$$

$z = -5$ sur la sol. de base $x_1=1, x_2=2, x_4=1, x_3=0, x_5=0$

Les coefficients des variables x_3, x_5 sont ≥ 0

Donc on ne peut plus diminuer la valeur de z .

La solution est optimale.

Bilan

- Une solution de base correspond à un point extrême de l'ensemble des solutions réalisables
- On passe de solution de base en solution de base voisines (une seule var. de base change)
- On s'arrête en consultant les coûts réduits:
 - Minimisation: coûts réduits ≥ 0 on stoppe
 - Maximisation: coûts réduits ≤ 0 on stoppe

Méthodes des tableaux

- On met les coefficients du problème dans un tableau
- Chaque tableau correspond à une solution de base
- Chaque ligne du tableau correspond à une contrainte
- La dernière ligne représente la fonction objectif z
- Le passage d'un tableau au suivant c'est-à-dire d'une solution de base à une solution de base voisine se fait simplement (sans calculer B^{-1}) par méthode de pivot de Gauss

Tableau initial : base initiale x3, x4, x5

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	1	1	1	0	0	=	3
x4	1	0	0	1	0	=	2
x5	-1	1	0	0	1	=	1
	-1	-2	0	0	0	=	0 + z

Zone bleu = contraintes

Zone verte = fonction objectif z

Variable entrant en base

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	1	1	1	0	0	=	3
x4	1	0	0	1	0	=	2
x5	-1	1	0	0	1	=	1
	-1	-2	0	0	0	=	0 + z



Coût réduit le plus petit = -2 $\Rightarrow$ x2 rentre en base

Variable sortant de base

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	1	1	1	0	0	=	3
x4	1	0	0	1	0	=	2
x5	-1	1	0	0	1	=	1
	-1	-2	0	0	0	=	0 + z



Coût réduit le plus petit = -2 $\Rightarrow$ x2 rentre en base

Qui sort ? $\text{Min} \{ \frac{3}{1}, \dots \}$

Variable sortant de base

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	1	1	1	0	0	=	3
x4	1	0	0	1	0	=	2
x5	-1	1	0	0	1	=	1
	-1	-2	0	0	0	=	0 + z

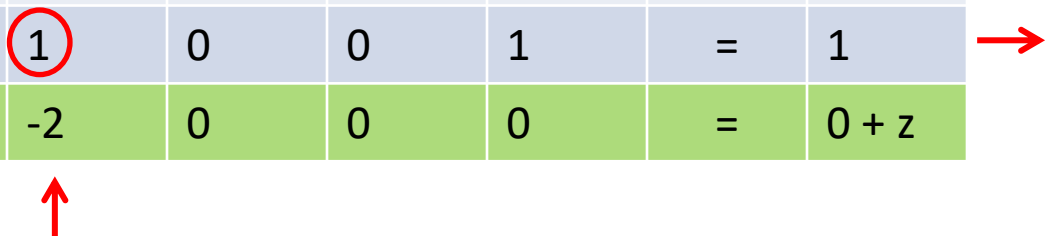


Coût réduit le plus petit = -2 $\Rightarrow$ x2 rentre en base

Qui sort ? $\text{Min} \{ 3/1, 1/1 \}$

Variable sortant de base

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	1	1	1	0	0	=	3
x4	1	0	0	1	0	=	2
x5	-1	1	0	0	1	=	1
	-1	-2	0	0	0	=	0 + z



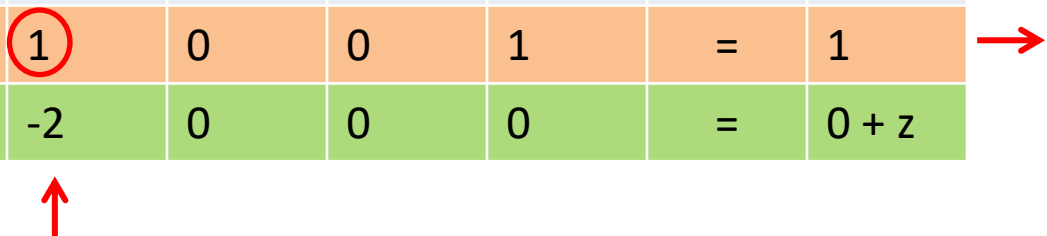
Coût réduit le plus petit = -2 $\Rightarrow$ x2 rentre en base

Qui sort ? $\text{Min} \{ 3/1, 1/1 \} = 1$ qui correspond à x5

Ratios du second membre sur les coefficients > 0 de la col. x2 (en zone bleue)
 $\min \{ \frac{3}{1}, \frac{1}{1} \} = 1$ qui correspond à x5

Changement de base : pivotage

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	1	1	1	0	0	=	3
x4	1	0	0	1	0	=	2
x5	-1	1	0	0	1	=	1
	-1	-2	0	0	0	=	0 + z



- Ligne du pivot = ligne de la variable qui sort ici x5 (ligne rose)
On la divise par le pivot entouré en rouge
- Une ligne i (autre que ligne du pivot)
Soit a_{ir} le coef. à l'intersection de la ligne i et col. entrante ici x2
On la remplace par ligne i $- a_{ir} \times$ nouvelle ligne du pivot

Nouveau tableau : base x_3, x_4, x_2

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	2	0	1	0	-1	=	2
x_4	1	0	0	1	0	=	2
x_2	-1	1	0	0	1	=	1
	-3	0	0	0	2	=	$2 + z$



On voit qu'il apparait une colonne de la matrice identité sous la variable x_2

Variable entrant en base

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	2	0	1	0	-1	=	2
x4	1	0	0	1	0	=	2
x2	-1	1	0	0	1	=	1
	-3	0	0	0	2	=	2 + z



Coût réduit le plus petit = -3 $\Rightarrow$ x1 rentre en base

Variable sortant de base

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	2	0	1	0	-1	=	2
x4	1	0	0	1	0	=	2
x2	-1	1	0	0	1	=	1
	-3	0	0	0	2	=	2 + z

Coût réduit le plus petit = -3 $\Rightarrow$ x1 rentre en base

Variable de base qui va s'annuler et sortir de base ?

Ratios du second membre sur les coefficients > 0 de la col. x1 (en zone bleue)

$$\min\left\{\frac{2}{2}, \frac{2}{1}\right\} = 1 \text{ qui correspond à } x3$$

Changement de base : pivotage

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	2	0	1	0	-1	=	2
x4	1	0	0	1	0	=	2
x2	-1	1	0	0	1	=	1
	-3	0	0	0	2	=	2 + z

- Ligne du pivot = ligne de la variable qui sort ici x3 (ligne rose)
On la divise par le pivot entouré en rouge
- Une ligne i (autre que ligne du pivot)
Soit a_{ir} le coef. à l'intersection de la ligne i et col. entrante ici x1
On la remplace par ligne i $- a_{ir} \times$ nouvelle ligne du pivot

Nouveau tableau : base x1, x4, x2

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	=	1
x4	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	=	1
x2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	=	2
	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	=	5 + z

Tous les coûts réduits ≥ 0 (ligne verte)

STOP

La solution se lit dans le second membre pour les var. de base

Les var. hors-base sont nulles

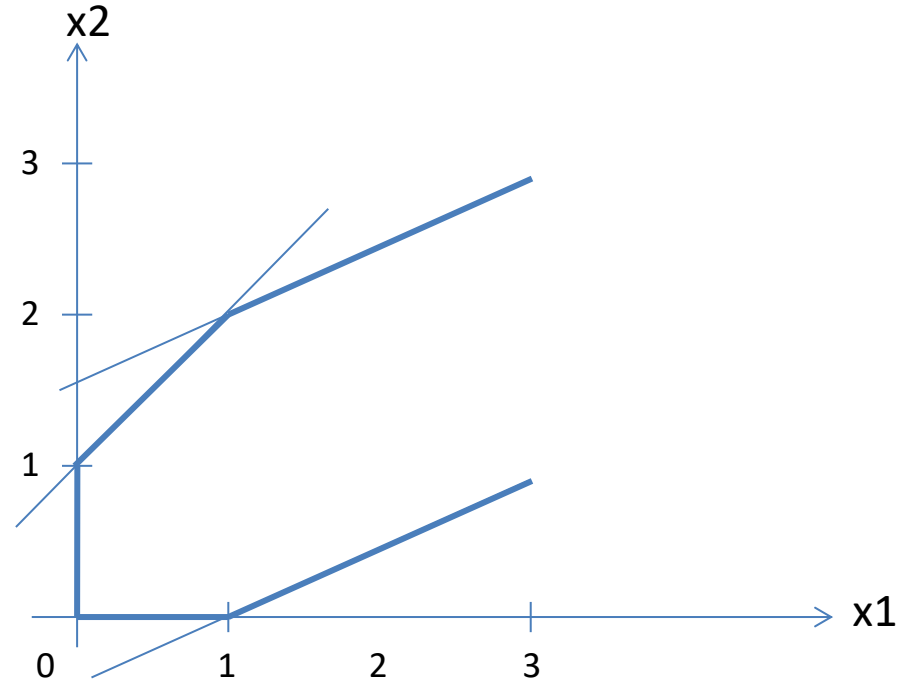
La solution est $x_1=1$, $x_4=1$, $x_2=2$, $x_3=x_5=0$

Un autre exemple

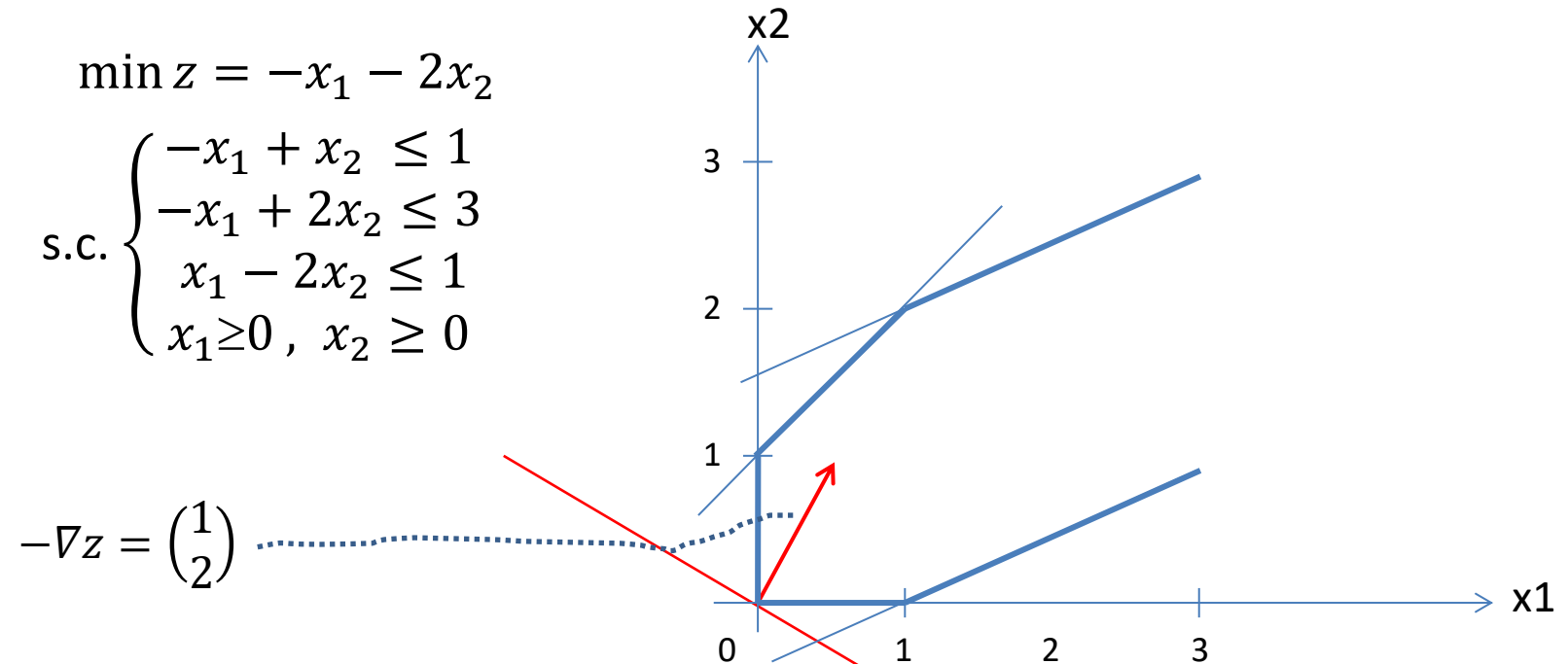
$$\begin{array}{ll} \min z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On trace l'ensemble des solutions réalisables

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c. } \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



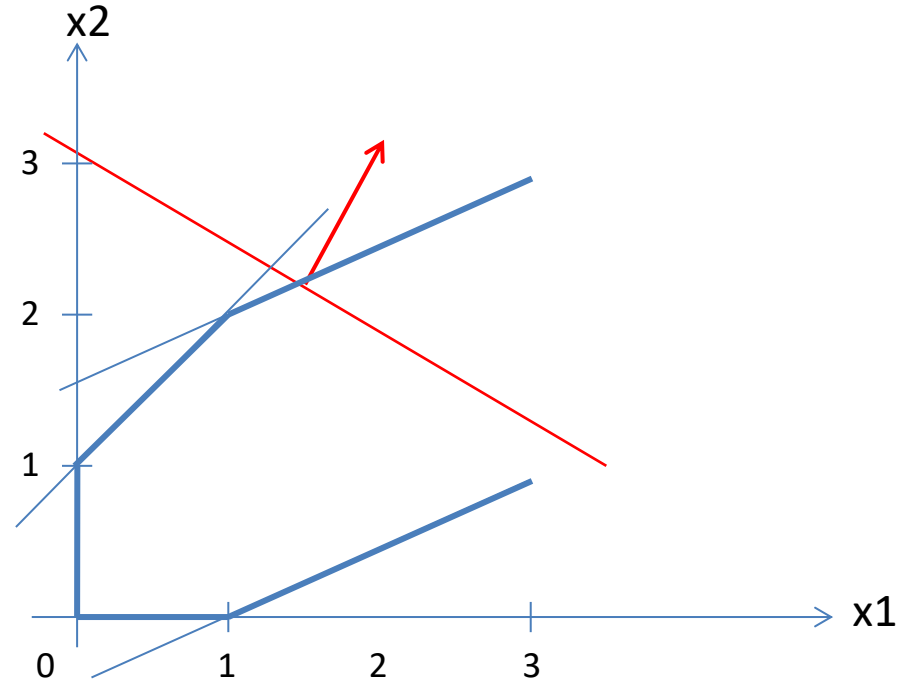
On minimise l'objectif z sur le domaine tracé



L'opposé du gradient de z est une direction de descente
Pour minimiser pousser la droite $z=0$
dans la direction opposée au gradient de z

Déplacement maximum en restant dans le domaine

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c. } \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



On peut pousser la droite tant que l'on veut
sans quitter l'ensemble des solutions réalisables
Optimum non borné = $-\infty$

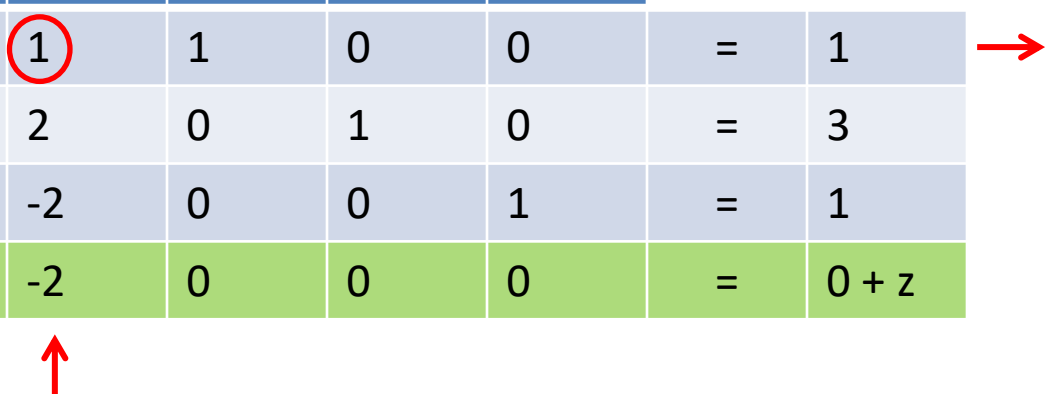
Appliquons l'algorithme du simplexe

$$\begin{array}{ll} \min z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{ll} -x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 & = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 & = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Mise sous forme standard: variables d'écart x_3, x_4, x_5 et =

Tableau initial : base x3, x4, x5

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x3	-1	1	1	0	0	=	1
x4	-1	2	0	1	0	=	3
x5	1	-2	0	0	1	=	1
	-1	-2	0	0	0	=	0 + z



x2 va rentrer en base

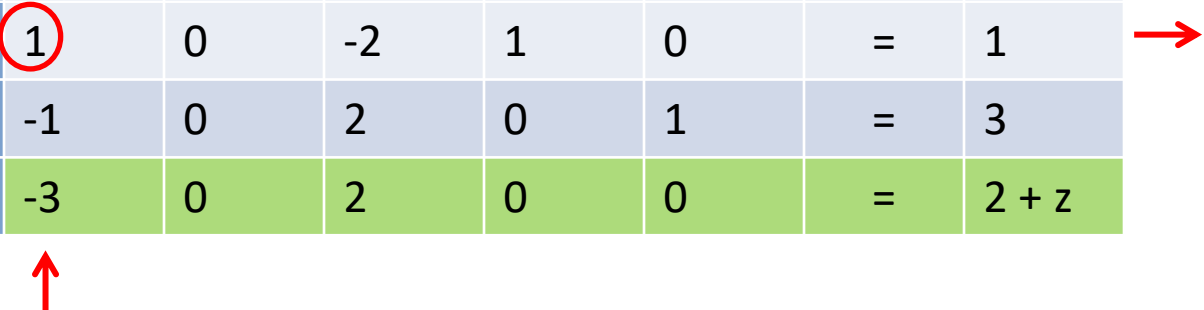
Ratios du second membre sur les coefficients > 0 de la col. x2 (en zone bleue)

$$\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{2}\right\} = 1 \text{ correspond à } x3$$

x3 va sortir de base

Tableau suivant : base x2, x4, x5

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x2	-1	1	1	0	0	=	1
x4	1	0	-2	1	0	=	1
x5	-1	0	2	0	1	=	3
	-3	0	2	0	0	=	2 + z



x1 va rentrer en base

Ratios du second membre sur les coefficients > 0 de la col. x1 (en zone bleue)

$\min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$ correspond à x4

x4 va sortir de base

Tableau suivant : base x2, x1, x5

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x2	0	1	-1	1	0	=	2
x1	1	0	-2	1	0	=	1
x5	0	0	0	1	1	=	4
	0	0	-4	3	0	=	5 + z



x3 va rentrer en base

Dans la colonne x3 (zone bleue) tous les coefficients ≤ 0 : -1 , -2 , 0

x3 peut augmenter indéfiniment

Optimum non borné

Les deux conditions d'arrêt de l'algorithme du simplexe

- Problème de minimisation
 1. Coûts réduits $\geq 0 \Rightarrow$ STOP optimum trouvé
 2. Une variable x_i de coût réduit < 0 et telle que les coefficients dans la colonne x_i sont $\leq 0 \Rightarrow$ STOP optimum non borné $-\infty$
- Problème de maximisation
 1. Coûts réduits $\leq 0 \Rightarrow$ STOP optimum trouvé
 2. Une variable x_i de coût réduit > 0 et telle que les coefficients dans la colonne x_i sont $\leq 0 \Rightarrow$ STOP optimum non borné $+\infty$

Base initiale

Jusqu'à maintenant, la base initiale était donnée par les variables d'écart.
Pas toujours possible.

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c. } &\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ajout variables d'écart

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Base x_3, x_4, x_5 . Sol. de base pas réalisable : $x_3=-2, x_4=-2, x_5=3, x_1=x_2=0$
car 2 variables <0

Recherche d'une base réalisable: résolution du problème auxiliaire

- On ajoute des variables artificielles sur les contraintes où c'est nécessaire c'est-à-dire sur les contraintes où les var. d'écart sont précédées du signe –
- On minimise ensuite la somme des variables artificielles afin de les rendre nulles

$$\begin{aligned} \min z' &= a_1 + a_2 \\ \text{s.c. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + a_1 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + a_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a la base a_1, a_2, x_5 . Sol. de base réalisable $a_1=2, a_2=2, x_5=3, x_1=x_2=x_3=x_4=0$

On résout le problème avec cette base de départ.

Si on trouve $a_1=a_2=0$ (hors-base)

alors on a une base réalisable formée par 3 variables du problème de départ.

Méthode des 2 phases

- Phase 1
 - Résolution du problème auxiliaire
 - Si les variables artificielles se sont annulées

Alors on a une base de départ pour le problème initial,
aller en phase 2

Sinon le problème initial n'a pas de solution réalisable
(domaine vide) STOP
- Phase 2
 - Résoudre le problème initial en partant de la base trouvée en phase 1

Phase 1: tableau initial

Base	x1	x2	x3	x4	x5	a1	a2		
a1	2	1	-1	0	0	1	0	=	2
a2	1	2	0	-1	0	0	1	=	2
x5	1	1	0	0	1	0	0	=	3
	-3	-3	1	1	0	0	0	=	-4 + z'

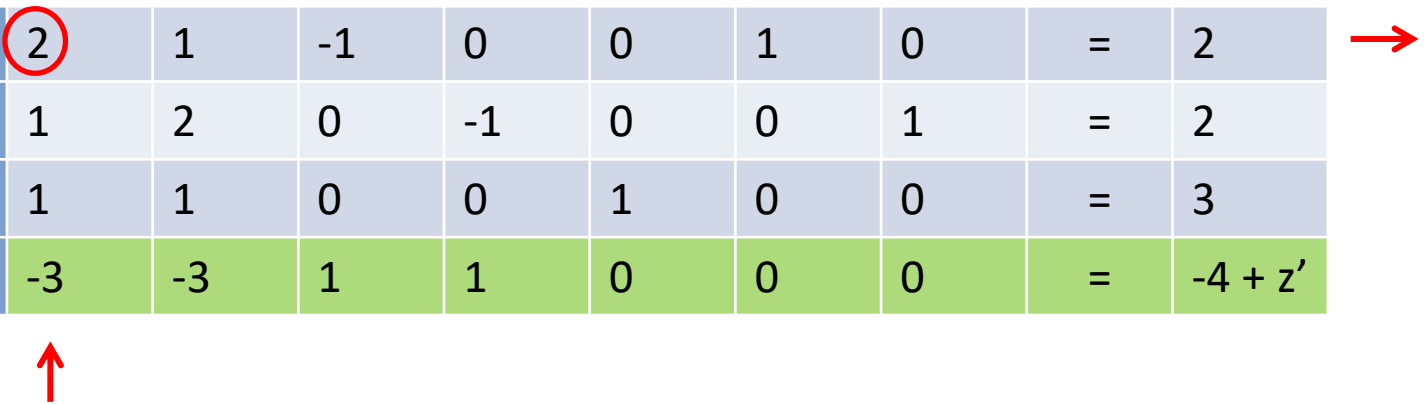
Il faut exprimer $z' = a_1 + a_2$ en fonction des variables hors-base

On remplace a_1 et a_2 par leur expression en fonction des variables x_1, x_2, x_3, x_4 donnée dans les deux premières ligne

On obtient la ligne verte

Phase 1-Tableau initial : base $a1, a2, x5$

Base	x1	x2	x3	x4	x5	$a1$	$a2$		
$a1$	2	1	-1	0	0	1	0	=	2
$a2$	1	2	0	-1	0	0	1	=	2
$x5$	1	1	0	0	1	0	0	=	3
	-3	-3	1	1	0	0	0	=	$-4 + z'$



$x1$ va rentrer en base

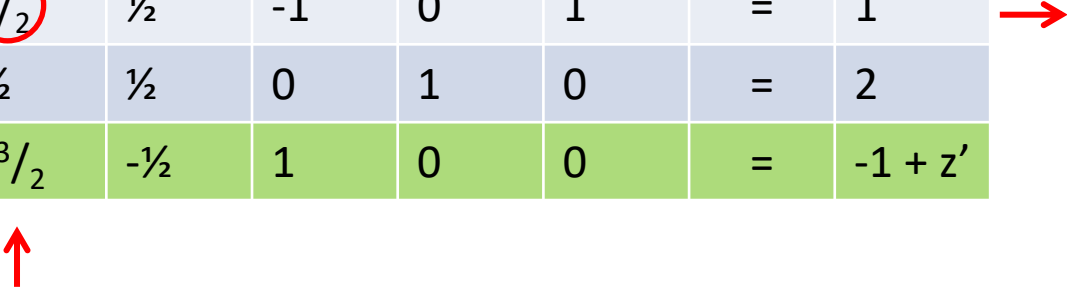
Ratios du second membre sur les coefficients > 0 de la col. $x1$ (en zone bleue)

$$\min\left\{\frac{2}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 1 \text{ correspond à } a1$$

$a1$ va sortir de base

Phase 1-Tableau suivant : base x_1, a_2, x_5

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_2		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	=	1
a_2	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	1	=	1
x_5	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	=	2
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	=	$-1 + z'$



x_2 va rentrer en base

Ratios du second membre sur les coefficients > 0 de la col. x_2 (en zone bleue)

$$\min \left\{ \frac{1}{1/2}, \frac{1}{3/2}, \frac{2}{1/2} \right\} = 2 \text{ correspond à } a_2$$

a_2 va sortir de base

Phase 1-Tableau final : base x1, x2, x5

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	=	$\frac{2}{3}$
x2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	=	$\frac{2}{3}$
x5	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	=	$\frac{5}{3}$
	0	0	0	0	0	=	$0 + z'$

Les variables artificielles sont hors-base

On a maintenant une base pour le problème initial

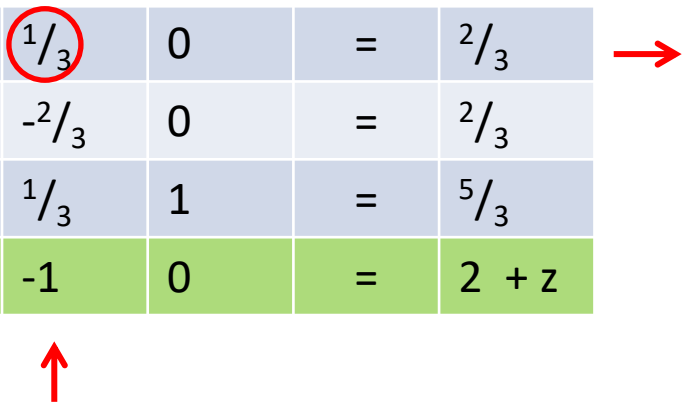
Phase 2: tableau initial

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	=	$\frac{2}{3}$
x2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	=	$\frac{2}{3}$
x5	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	=	$\frac{5}{3}$
	0	0	0	-1	0	=	2 + z

Il faut exprimer $z = -x_1 - 2x_2$ en fonction des variables hors-base x_3, x_4
 On remplace x_1 et x_2 par leurs expressions en fonction de x_3, x_4
 qui sont données en ligne 1 et 2 du tableau
 On obtient la ligne verte

Phase 2-Tableau initial : base x1, x2, x5

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	=	$\frac{2}{3}$
x2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	=	$\frac{2}{3}$
x5	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	=	$\frac{5}{3}$
	0	0	0	-1	0	=	2 + z



x4 va rentrer en base

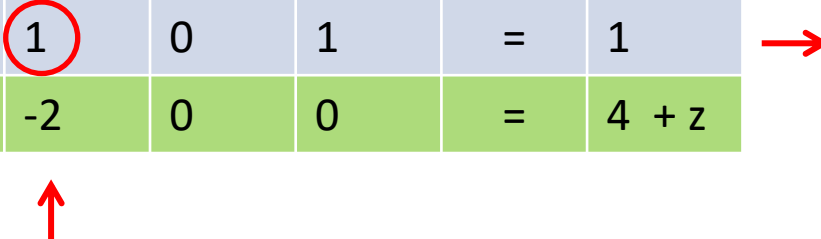
Ratios du second membre sur les coefficients > 0 de la col. x4 (en zone bleue)

$$\min \left\{ \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} \right\} = 2 \text{ correspond à } x1$$

x1 va sortir de base

Phase 2-Tableau suivant : base x4, x2, x5

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x4	3	0	-2	1	0	=	2
x2	2	1	-1	0	0	=	2
x5	-1	0	1	0	1	=	1
	3	0	-2	0	0	=	4 + z



x3 va rentrer en base

Ratios du second membre sur les coefficients > 0 de la col. x3 (en zone bleue)

$\min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$ correspond à x5

x5 va sortir de base

Phase 2-Tableau final : base x4, x2, x3

Base	x1	x2	x3	x4	x5		
x4	1	0	0	1	2	=	4
x2	1	1	0	0	1	=	3
x3	-1	0	1	0	1	=	1
	1	0	0	0	2	=	6 + z

Tous les coûts réduits ≥ 0 (ligne verte)

STOP

La solution se lit dans le second membre pour les var. de base

Les var. hors-base sont nulles

La solution est $x_4=4$, $x_2=3$, $x_3=1$, $x_1=x_5=0$

Conclusion

- PL modèle de nombreux problèmes: économie, production, ...
- Résolution efficace par l'algorithme du simplexe et la méthode des tableaux
- D'autres algorithmes existent : points intérieurs, méthodes des ellipsoïdes
- PLNE (nombres entiers) problème discret résolu par procédures arborescentes (B&B) mais la PL est utilisée, et donc le simplexe, dans ces procédures