TD PLNE

Exercice 1. Méthode arborescente pour le sac-à-dos en 0-1

Soit (P) le problème de sac-à-dos :

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Sous contraintes : $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0,1\} \ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Où c_i, a_i, b sont des entiers naturels positifs : a_i est le poids de l'objet i, c_i sa valeur marchande, b la capacité du sac.

Soit (PR) la relaxation continue de (P) où les variables sont dans l'intervalle [0,1] : $x_i \in [0,1]\ i = 1, \dots, n$.

(PR) se résout polynomialement de la façon suivante :

-on trie les ratios $\frac{c_i}{a_i}$ i=1,….,n dans l'ordre décroissant. Ensuite, selon cet ordre, on met les objets dans le sac jusqu'à ce que l'on dépasse la capacité b. Le premier objet qui dépasse est mis fractionnaire.

- Supposons les objets indexés par ordre des ratios $\frac{c_i}{a_i}$ i=1,….,n décroissant. Soit i^* tel que $\sum_{i=1}^{i^*-1} a_i \leq b$ et $\sum_{i=1}^{i^*} a_i > b$, on pose :

$$\begin{cases} x_i = 1 \quad i = 1, \dots, i^* - 1 \\ x_{i^*} = \dfrac{b - \sum_{i=1}^{i^*-1} a_i}{a_{i^*}} \\ x_i = 0 \quad i \geq i^* + 1 \end{cases}$$

On considère l'instance de (P) suivante :

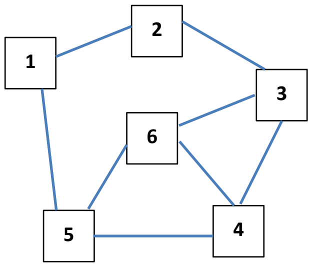
i	1	2	3	4	5
c_i	8	16	20	12	1
a_i	3	7	9	6	1

b=17

Résoudre (P) par une méthode arborescente où l'évaluation (majorant) d'un sous-problème d'un nœud de l'arborescence de recherche est obtenue par la résolution de la relaxation continue du sous-problème, et où le parcours de l'arborescence se fait en meilleur d'abord.

Exercice 2. Méthode arborescente pour le problème du stable maximum

On considère le problème du stable dans un graphe. Soit un graphe, non orienté, G=(X,E) avec X les sommets, E les arêtes. Un stable S est un ensemble de sommets qui ne sont pas reliés 2 à 2 par une arête. Les sommets de G sont munis de poids. On veut trouver un ensemble stable S de poids maximum. On considère le problème sur le graphe suivant :



Les poids sont les suivants :

sommets	1	2	3	4	5	6
poids	2	2	4	2	2	4

1-Modéliser le problème par un PLNE avec les variables 0-1 x_i $i \in X$ telle que $x_i=1$ si le sommet i est mis dans S et $x_i=0$ sinon. On mettra une contrainte par arête du graphe soit 8 contraintes.

2-On va résoudre ce problème en 0-1 par une méthode arborescente. Rappelons que c'est un problème de maximisation. Les UB (bornes supérieures) seront donc données par la relaxation continue. La séparation sur les variables fractionnaires se fera en commençant par celle de plus petit indice : par exemple, si x_1 et x_2 sont fractionnaires à une étape donnée, on séparera sur x_1. Le parcours de l'arborescence de recherche se fera en meilleur d'abord. La relaxation continue sera résolue par GLPK (option --*nomip*).

Représenter l'arborescence de recherche obtenue.

Exercice 3. Coupe de Chvatal

On considère le problème du stable dans un graphe. Soit un graphe, non orienté, G=(X,E) avec X les sommets, E les arêtes. Un stable S est un ensemble de sommets qui ne sont pas reliés 2 à 2 par une arête. Les sommets de G sont munis de poids. On veut trouver un ensemble stable S de poids maximum.

1- On considère un graphe qui est un cycle de n sommets avec n impair. Modéliser le problème par un PLNE avec les variables 0-1 x_i $i \in X$ telle que $x_i=1$ si le sommet i est mis dans S et $x_i=0$ sinon. On mettra une contrainte par arête du graphe.

2-Montrer avec une coupe de Chvatal que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n-1}{2}$ est une inégalité valide. Cette inégalité est appelée *inégalité de cycle impair*.

Exercice 4. Résolution du problème du stable maximum par un algorithme de coupes

On considère le problème du stable de poids maximum pour le graphe de l'exercice 2. On veut résoudre ce problème par une méthode de coupes i.e. par ajout d'inégalités valides violées. Les inégalités valides que l'on veut utiliser sont les inégalités de cycle impair exposées à l'exercice précédent. L'algorithme est le suivant :

1. Résoudre la relaxation continue du modèle par GLPK (option --*nomip*).
2. Lister toutes les inégalités de cycle impair violées par la solution de la relaxation continue.
3. S'il y en a au moins une alors la rajouter au modèle et retourner au 1
   Sinon FIN.