Programmation Dynamique

Argent de poche

Un étudiant désire travailler pendant son temps libre pour gagner un peu d'argent de poche. Il a trouvé n=4 emplois possibles. Les salaires proposés ne sont pas toujours proportionnels au nombre d'heures. Le tableau suivant donne le salaire pour les « jobs » trouvés en fonctions du nombre d'heures. Pour ne pas compromettre ses études, il a décidé de travailler au plus T=4 heures par semaine.

salaires	J1	J2	J3	J4
0 heure	0	0	0	0
1 heure	26	23	16	19
2 heures	39	36	32	36
3 heures	48	44	48	47
4 heures.	54	49	64	56

Combien d'heures et à quels emplois doit-il se consacrer afin de maximiser ses gains (par semaine) ?

En période d'examens, il devra effectuer moins d'heures. Par exemple 3 voire 2 heures par semaine. Quel est dans chacun de ces cas la meilleure affectation ?

Affectation de chercheurs à des équipes

4 équipes travaillent sur un projet. Elles ont des approches différentes. On a estimé que leur probabilité d'échec est 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1. La probabilité d'échec du projet est donc $0,4 \times 0,6 \times 0,8 \times 1 = 0,192$. Comme on cherche à minimiser la probabilité d'échec total, on affecte 3 chercheurs supplémentaires de haut niveau au projet. Le tableau suivant donne pour chaque équipe, la probabilité d'échec si 0, 1, 2 ou 3 chercheurs leur sont affectés.

Proba d'échec	E1	E2	E3	E4
0 cherch. suppl.	0,4	0,6	0,8	1
1 cherch. suppl.	0,2	0,4	0,5	0,9
2 cherch. suppl.	0,15	0,2	0,3	0,1
3 cherch. suppl.	0,1	0,19	0,2	0,1

Comment affecter les chercheurs supplémentaires de façon à minimiser la probabilité d'échec du projet ?

Comment placer au mieux 1 euros sur 12 mois

Vous disposez d'une somme de 1 euros que vous placez d'une manière optimale pendant n=12 périodes. Si au début de la période i vous placez une somme S, vous recevrez une somme $S \times a_i$ au début de la période i+2 : la somme S sera immobilisée sur i et i+1 et la nouvelle somme S'= S$\times a_i$ sera disponible et donc être placée ou non au début de la période i+2.

Nous étudierons l'exemple suivant (n=12) :

Période i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	2	4	1	2	6	2	2	4	1	4	2	0

Quel gain optimal pouvez-vous obtenir au début de la période n+1 (soit la fin de la période n) ?

Comment placer la somme de façon à maximiser le gain obtenu ?

Méthodologie. Noter f(i) la somme optimale obtenue en début de période i et donner la formule de récurrence qui permet d'obtenir f(i). Montrer que la solution du problème revient à trouver un cheminement optimal dans un graphe que l'on représentera.

Sac-à-dos en 0-1

On considère le problème en variables 0-1 suivant :

$$\max_y \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \;\; s.c. \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \leq b \; et \; y_i = 0 \; ou \; 1$$

p_i>0 est le poids de l'objet i, c_i>0 sa valeur, b est la capacité du sac-à-dos. Il s'agit donc de remplir le sac de façon à maximiser le gain total tout en respectant la contrainte de capacité.

On note $f_i(x_i)$ le gain optimal quand on considère les objets de 1 à i et quand le poids total du sac est x_i .

Donner la formule de récurrence permettant de calculer $f_i(x_i)$ en fonction de f_{i-1} .

A partir de ces formules de récurrence, résoudre l'instance suivante avec n=5 objets :

Objet i	1	2	3	4	5
Valeur c_i	10	20	30	40	50
Poids p_i	5	4	3	2	1

La capacité du sac est b=7.

Planification de la construction de bateaux

Une firme construit des bateaux. Elle doit satisfaire les commandes suivantes pour la fin du mois indiqué :

mois	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
nb. bateaux	1	2	5	3	2	1

Le fabricant peut construire jusqu'à 4 bateaux par mois mais il ne peut pas en garder plus de 3 en stock. Si des bateaux sont construits dans un mois donné, il y a un coût fixe de 4 unités monétaires, plus un coût de construction de 10 u.m. par bateau. Le coût de stockage est de 1 u.m. par bateau et par mois.

Dans quels mois et quelles quantités de bateaux la firme doit-elle construire pour minimiser le coût total ? On suppose que le stock initial est nul et qu'il doit être nul à la fin de Juillet.

1-Avant de commencer les calculs, on remarquera que les coûts de construction de bateaux n'interviennent pas dans la prise de décision et l'optimisation. Quel sera, quoique l'on fasse, le coût de construction des bateaux ?

Dans la suite, on ne prend pas en compte les coûts de construction que l'on rajoutera simplement à la suite de l'optimisation.

2-On note : s_i=le stock à la fin du mois i, x_i=la quantité de bateaux produite pendant le mois i, d_i=la demande pour le mois i. Etablir la relation liant s_{i-1}, s_i, x_i et d_i.

3-On exprime le coût de la période i en fonction de s_{i-1} et s_i et on le note $v_i(s_i,s_{i-1})$. Donner son expression.

4-On note $f_i(s_i)$ le coût minimal en fin de mois i si le stock est s_i. Donner l'expression de $f_i(s_i)$ en fonction de f_{i-1} et v_i .

5-Quel est le coût minimal, hors-mis coûts de construction, en fin de Juillet ? Donner le nombre de bateaux à construire pour chaque mois.