

Optimisation

ESP (Ecole Supérieure Polytechnique) de Dakar

Alain Faye

1 – Introduction

Janvier 2019

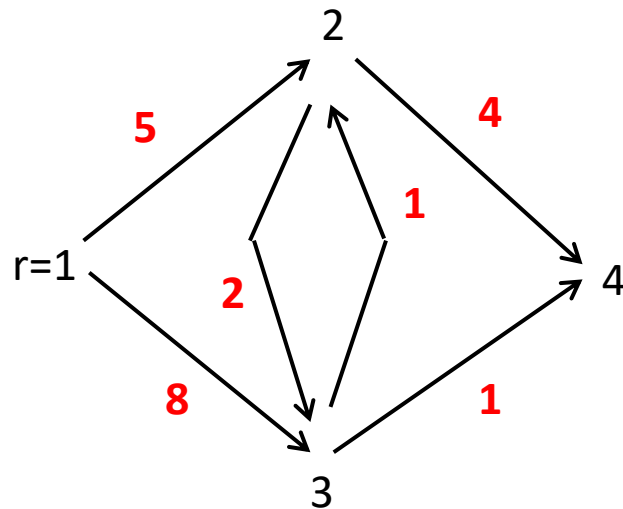
Qu'est-ce un problème d'optimisation?

- Prendre les bonnes décisions dans le but de d'optimiser un objectif
 - maximiser un revenu, minimiser un coût
- Optimisation continue, discrète, mixte selon la nature du problème
- Modélisation mathématique
 - mise en équations du problème
- Résolution exacte ou approchée

Exemple 1 : Plus court chemin

- Problème du plus court chemin entre 2 nœuds d'un réseau représenté par un graphe dans lequel tout arc est valué par une longueur.
- Solution réalisable (admissible) : un chemin - ensemble d'arcs qui relie les 2 nœuds.
- Longueur d'un chemin = somme des longueurs des arcs qui composent ce chemin.

Exemple1 plus courts chemins



Chemins de 1 à 4

Chemin 1, 2, 4 valeur 9

Chemin 1, 3, 4 valeur 9

Chemin 1, 3, 2, 4 valeur 13

Chemin 1, 2, 3, 4 valeur 8 ← **optimal**

Rappel : si les longueurs sont positives,
l'algorithme de **Dijkstra** permet de résoudre ce problème...

Exemple 2 : Achat de billets d'avion

Un homme d'affaires résidant à Paris (P) doit aller à Rome (R) le lundi et rentrer le mercredi pendant 5 semaines consécutives.

Le prix d'un billet aller-retour : 400 euros.

Réduction de 20% si au moins un week-end est inclus.

Aller simple : 65% du prix aller-retour.

Exemple 2 : Achat de billets d'avion

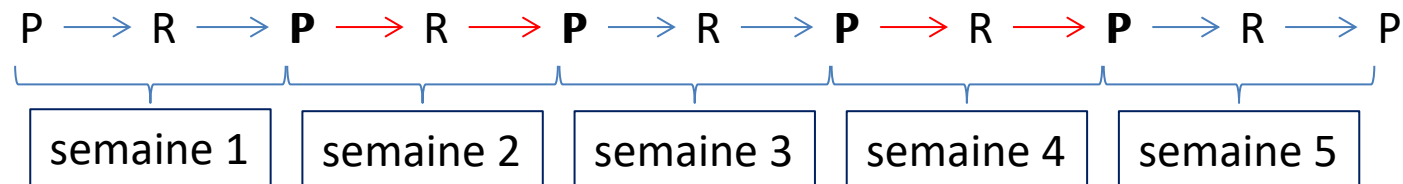
Un homme d'affaires résidant à Paris (P) doit aller à Rome (R) le lundi et rentrer le mercredi pendant 5 semaines consécutives.

Le prix d'un billet aller-retour : 400 euros.

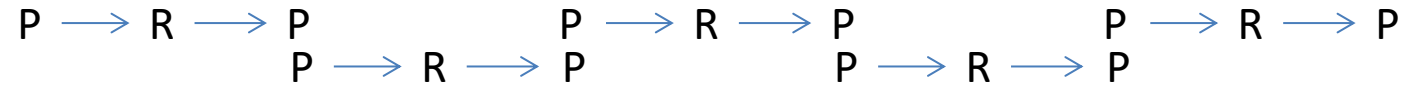
Réduction de 20% si au moins un week-end est inclus.

Aller simple : 65% du prix aller-retour.

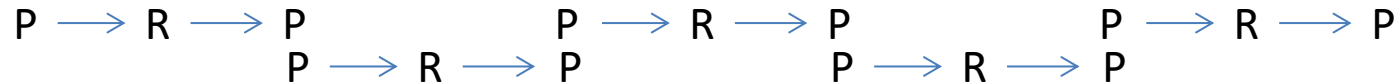
Il faut donc recouvrir les trajets P-R et R-P sur 5 semaines au moindre coût



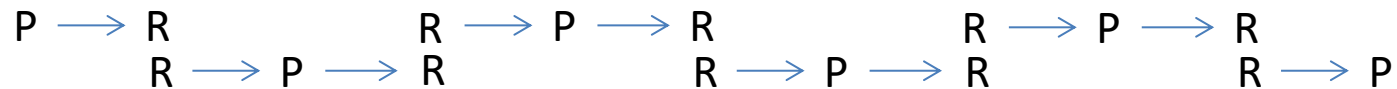
Sol.1 5 Aller-retour Paris-Rome coût = $5 \times 400 = 2000$ euros



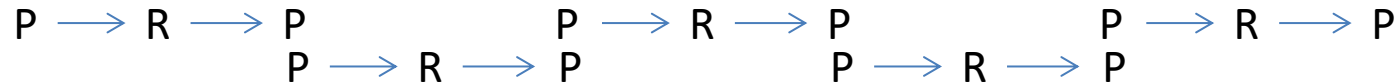
Sol.1 5 Aller-retour Paris-Rome coût = $5 \times 400 = 2000$ euros



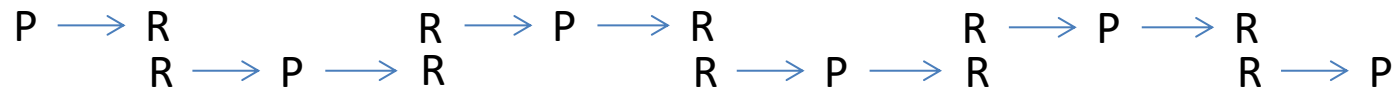
Sol.2 1 Aller Paris-Rome + 4 aller-retour Rome-Rome + 1 Aller Rome-Paris
 Coût = $400(0,65 + 4 \times 0,8 + 0,65) = 1800$ euros



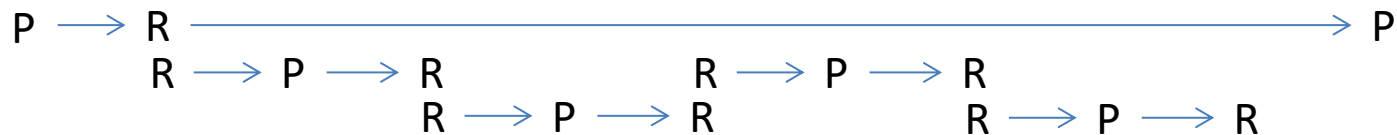
Sol.1 5 Aller-retour Paris-Rome coût = $5 \times 400 = 2000$ euros



Sol.2 1 Aller Paris-Rome + 4 aller-retour Rome-Rome + 1 Aller Rome-Paris
Coût = $400(0,65 + 4 \times 0,8 + 0,65) = 1800$ euros



Sol.3 1 Aller-retour Paris-Rome départ semaine 1, retour semaine 5
+ 4 aller-retour Rome-Rome
Coût = $400(0,8 + 4 \times 0,8) = 1600$ euros



On ne peut pas faire mieux que la Solution 3. Elle est **optimale**

Exemple 3 : Localisation de concentrateurs

Données : terminaux (clients), sites potentiels pour concentrateurs, et

- distances (en km) sites-terminaux et coût d'un km de raccordement,
- coût d'installation d'un concentrateur sur un site.

Dist. (km)	S1	S2	S3	S4
T1	1	2	1	4
T2	6	1	6	3
T3	6	2	3	1
T4	3	3	7	10
T5	4	5	3	2

	S1	S2	S3	S4
Coût instal. (en Keuros)	110	200	100	100

Coût d'un km de raccordement : 15 Keuros

Exemple 3 : Localisation de concentrateurs (une première solution)

Dist. (km)	S1	S2	S3	S4
T1	1	2	1	4
T2	6	1	6	3
T3	6	2	3	1
T4	3	3	7	10
T5	4	5	3	2

	S1	S2	S3	S4
Coût instal. (en Keuros)	110	200	100	100

Coût d'un km de raccordement : 15 Keuros

Solution 1 : S1, S2 et S3 ouverts

On a intérêt à raccorder T1 à S1 (ou S3), T2 à S2, T3 à S2, T4 à S1 (ou S2) et T5 à S3

Coûts d'installation :
 $110 + 200 + 100 = 410$

Coûts de raccordement :
 $15 * (1 + 1 + 2 + 3 + 3) = 150$

Coût total : $410 + 150 = 560$

Exemple 3 : Localisation de concentrateurs (une deuxième solution)

Dist. (km)	S1	S2	S3	S4
T1	1	2	1	4
T2	6	1	6	3
T3	6	2	3	1
T4	3	3	7	10
T5	4	5	3	2

	S1	S2	S3	S4
Coût instal. (en Keuros)	110	200	100	100

Coût d'un km de raccordement : 15 Keuros

Solution 2 : S3 ouvert

==> On raccorde tous les clients à S3 !

Coût d'installation :
100

Coûts de raccordement :
 $15 \times (1 + 6 + 3 + 7 + 3) = 300$

Coût total : $100 + 300 = 400$

Exemple 3 : Localisation de concentrateurs (une deuxième solution)

Dist. (km)	S1	S2	S3	S4
T1	1	2	1	4
T2	6	1	6	3
T3	6	2	3	1
T4	3	3	7	10
T5	4	5	3	2

	S1	S2	S3	S4
Coût instal. (en Keuros)	110	200	100	100

Coût d'un km de raccordement : 15 Keuros

Solution 2 : S3 ouvert

==> On raccorde tous les clients à S3 !

Coût d'installation :
100

Coûts de raccordement :
 $15 \times (1 + 6 + 3 + 7 + 3) = 300$

Coût total : $100 + 300 = 400$

Est-ce optimal ?

Conclusion

- Optimiser un objectif sous des contraintes
- Résolution exacte ou approchée (sous-optimale)
- Il reste à
 - Modéliser le problème
 - En faire un programme mathématique
 - Résoudre le modèle mathématique