Optimisation

ESP (Ecole Supérieure Polytechnique) de Dakar

Alain Faye

2 – Modélisation

Janvier 2019

Un exemple

Un brasseur fabrique 2 types de bières : blonde et brune.
3 ingrédients : maïs , houblon , malt.
Quantités requises par unité de volume (u.v):
Bière blonde: 2,5 kg de maïs, 125 g de houblon, 17,5 kg de malt
Bière brune : 7,5 kg de maïs, 125 g de houblon, 10 kg de malt

Le brasseur dispose de 240 kg maïs, 5 kg houblon , 595 kg malt

Prix vente par u.v. : blonde 15 euros , brune 20 euros

Le brasseur veut maximiser son revenu .
Quelle quantité de bières blondes et/ou brunes doit-il produire pour cela ?

Modélisation

On met le problème en équations : les **variables** sont les inconnues que l'on cherche à déterminer .
Il y a beaucoup de solutions mais généralement une seule solution optimale vis-à-vis de l'objectif recherché .
Ici l'objectif est maximiser le revenu.

Variables
$x_1 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière blonde
$x_2 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière brune

Le revenu (à maximiser)
$z = 15\, x_1 + 20\, x_2$

Modélisation

Variables

$x_1 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière blonde

$x_2 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière brune

Le revenu (à maximiser)

$z = 15\, x_1 + 20\, x_2$

Les contraintes : limite en matières premières maïs , houblon , malt

Modélisation

Variables

$x_1 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière blonde

$x_2 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière brune

Le revenu (à maximiser)

$z = 15\ x_1 + 20\ x_2$

Les contraintes : limite en matières premières maïs , houblon , malt

$2{,}5\ x_1 + 7{,}5\ x_2 \leq 240$ (maïs)

$0{,}125\ x_1 + 0{,}125\ x_2 \leq 5$ (houblon)

$17{,}5\ x_1 + 10\ x_2 \leq 595$ (malt)

Une solution

Variables

$x_1 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière blonde

$x_2 \geq 0$ quantité produite (en u.v.) de bière brune

Le revenu (à maximiser)

$z = 15\ x_1 + 20\ x_2$

Les contraintes : limite en matières premières maïs , houblon , malt

$2{,}5\ x_1 + 7{,}5\ x_2 \leq 240$ (maïs)

$0{,}125\ x_1 + 0{,}125\ x_2 \leq 5$ (houblon)

$17{,}5\ x_1 + 10\ x_2 \leq 595$ (malt)

Une solution:

$x_1 = 12$ $z = 740$ optimal ?

$x_2 = 28$

Exemple sac-à-dos

- Objets i=1,…,n
- Poids a_i>0 i=1,…,n
- Valeur c_i>0 i=1,…,n
- Capacité du sac b (poids max. qu'il peut supporter)
- Remplir le sac en respectant la contrainte de capacité et en maximisant la valeur totale des objets emportés dans le sac

Exemple sac-à-dos

Objets i	1	2	3	4	5
Poids a_i	10	8	15	12	7
Valeurs c_i	50	40	70	60	36

b = 35

Quelques solutions

Objets 1,2,3 valeur totale = 50+40+70 = 160

Objets 3,4,5 valeur totale = 70+60+36 = 166

Exemple sac-à-dos

- Variables
  - décision sur chaque objet non-oui $\Leftrightarrow$ 0-1
- Contrainte
  - Respecter la capacité
- Objectif
  - Maximiser la valeur emportée

Exemple sac-à-dos

- Variables
  - décision sur chaque objet non-oui $\Leftrightarrow$ 0-1
  - x_i=1 si on prend l'objet i , 0 sinon

- Contrainte
  - Respecter la capacité : $\sum_{i=1,n} a_i x_i \leq b$

- Objectif
  - Maximiser la valeur emportée : max $z=\sum_{i=1,n} c_i x_i$

Programme linéaire

- Programme mathématique
- Un objectif (noté z généralement) linéaire à minimiser ou maximiser et des contraintes linéaires
- Une fonction linéaire (on dit aussi forme linéaire) de variables $x=(x_1,\ldots,x_n)$ est de la forme: $f(x)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n$
- Variables continues (bière) ou discrètes (sac-à-dos)

Exemple 1 production de lots

- 2 types de produit P1 , P2
- 3 usines U1, U2, U3 de capacité limitée
- Le produit P1 doit être usiné dans U1 et U3
- Le produit P2 doit être usiné dans U2 et U3
- Les produits sont vendus par lot de 20 unités
- Le tableau suivant donne
  - les temps d'usinage (par lot) dans chaque usine pour chaque produit
  - les profits par lot
  - et les capacités de production en heures pour chaque usine
- Quelles quantités de lots doit-on produire pour maximiser le profit total ?
- Les variables : x_1 nombre lots produit1, x_2 nombre lots produit2

	Tps de production (h / lot)		Capacité de production (h)
	Produit 1	Produit 2	
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18
Profit (€) / lot	3000	5000	

Exemple 2 composition d'un aliment pour bétail

- 3 produits bruts: orge , arachide , sésame
- Chaque produit brut contient un certain pourcentage de graisse et protéine (cf tableau ci-dessous)
- On veut réaliser un aliment pour bétail à partir de ces produits bruts qui contienne 22% de protéines et 3,6% de graisse
- On connait le prix par tonne des produits bruts (cf tableau ci-dessous)
- Quelle est la composition de l'aliment pour bétail en terme de proportion de produits bruts qui satisfait les contraintes en protéines et graisses et qui soit de coût minimum?
- $x_1 \geq 0$ proportion d'orge , $x_2 \geq 0$ proportion d'arachide, $x_3 \geq 0$ proportion de sésame
- Le total des proportions $x_1+x_2+x_3=1$

Produit brut	j=1 ORGE	j=2 ARACHIDES	j=3 SESAME	Pourcentage requis
Pourcentage de protéines	12%	52%	42%	22%
Pourcentage de graisses	2%	2%	10%	3,60%
Coût par tonne	25	41	39	

Exemple 3 horaire de personnels

- Chaque jour est divisé en **périodes** de 2h et 6h
- Pour chaque période un nombre minimum d'employés
- Les employés travaillent 8h par jour mais ne commencent pas tous à la même heure. Un **quart** est une plage de travail de 8h qui commence à une certaine heure du jour et les employés travaillent sur un quart par jour
- Plusieurs quarts partagent la même période
- Les salaires dépendent du quart sur lequel l'employé travaille
- Comment affecter les employés aux quarts de façon à respecter le nombre minimum d'employés par période, tout en minimisant les dépenses liées aux salaires ?

Exemple 3 horaire de personnels

- Modéliser le problème sur l'instance suivante

Période	Quart 1	Quart 2	Quart 3	Quart 4	Quart 5	MinEmp
6-8	x					48
8-10	x	x				79
10-12	x	x				65
12-14	x	x	x			87
14-16		x	x			64
16-18			x	x		73
18-20			x	x		82
20-22				x		43
22-24				x	x	52
0-6					x	15
Salaire	170	160	175	180	195	

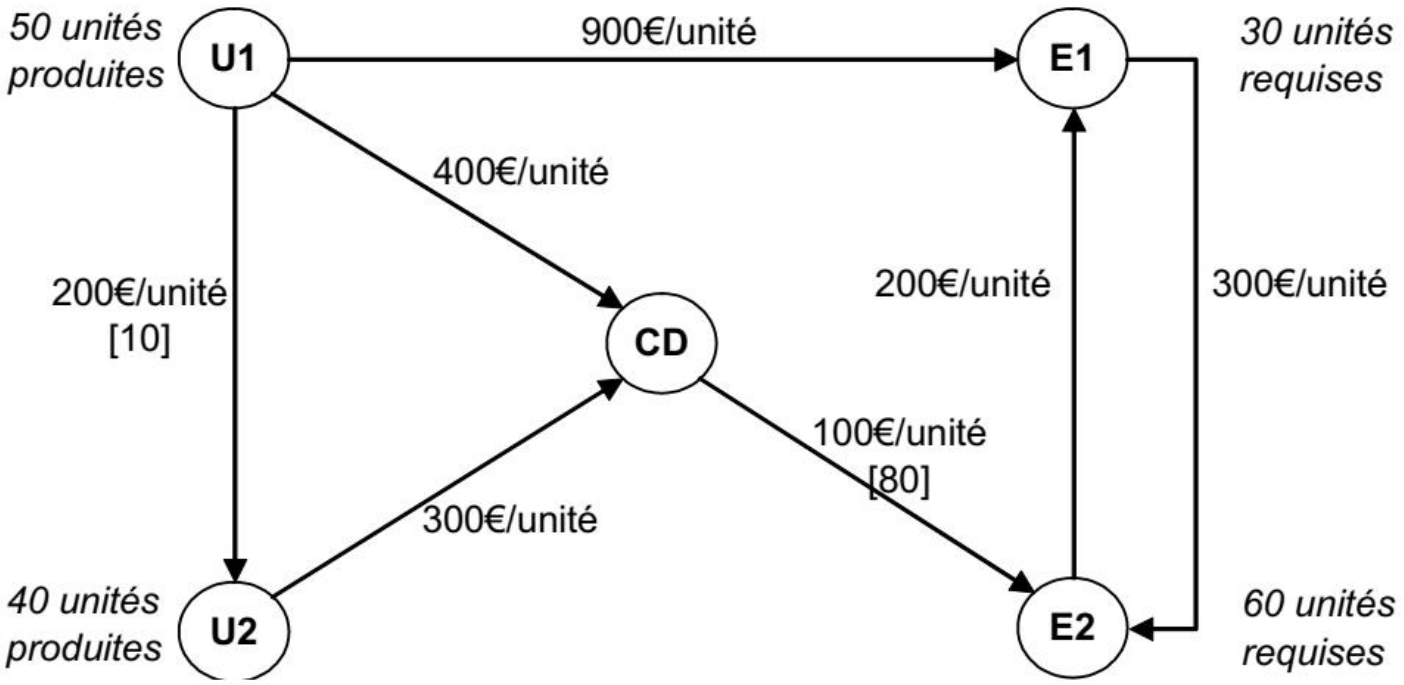
Exemple 3 horaire de personnels

- Variables : x_i = nombre d'employés affectés au quart i = 1,…,5
- Contraintes : respecter le nombre minimum d'employés par période
- Objectif : minimiser la masse salariale

Exemple 4 transport

- 2 usines U1, U2 produisent un même produit P
- U1 produit 50 unités de P, U2 40
- 1 centre de distribution CD par lequel peuvent passer les unités du produit P
- 2 entrepôts E1, E2 vers lesquels doivent être acheminées les unités de P
- E1 a une capacité de stockage de 30 unités, E2 60
- Au total le nombre d'unités produites 50+40 est égal à la capacité de stockage 60+30
- Le centre de distribution n'est pas limité en terme de capacité
- Un réseau de distribution modélisé par un graphe orienté ayant pour sommets U1,U2,CD,E1,E2 et un certain nombre d'arcs représentant les liaisons physiques entre les usines, les entrepôts et le centre de distribution. Chaque arc est muni d'un coût représentant le coût par unité de P pour traverser cet arc c'est-à-dire pour acheminer le produit de la queue à la tête de l'arc. Certains arcs ont une capacité représentant le nombre maximum d'unités pouvant passer sur cet arc: (U1,U2) a une capacité de 10, (CD,E2) une capacité de 80. Voir le graphe ci-dessous.
- Comment acheminer les 90 unités produites par les usines vers les entrepôts et ceci au moindre coût ?

Données du problème de transport



Exemple 4 transport

- Variables : x_{ij} = quantité de produit circulant sur l'arc (i,j) du graphe. Donc 7 variables au total
- Contraintes :
  - U1 produit 50 , U2 produit 40
  - E1 reçoit 30, E2 reçoit 60
  - Équations de conservation du flux en chaque nœud du graphe : flux entrant=flux sortant
  - Contraintes de capacité: flot limité sur certains arcs
- Minimiser le coût total de transport

Résolution d'un Programme Linéaire

- Plusieurs solveurs disponibles
- Commerciaux, libres ou gratuits
- Exemples
  - Excel
  - Glpk (licence gnu)
  - Cplex
  - XpressMP

Solveur de Excel

- utilisation du « solveur » de Excel
  - Ouvrir un fichier Excel, cliquer sur onglet Fichier, cliquer sur Options (au bas de la liste)
  - Cliquer sur Compléments (à gauche) puis à droite cliquer sur Complément Solveur puis sur OK en bas à droite
  - On se retrouve sur la feuille Excel, cliquer sur l'onglet Données. On voit l'icône Solveur dans la barre de menu (en haut à droite)

Solveur de Excel

- Se donner une cellule Excel pour chaque variable. Par exemple je décide que la variable x_1 est dans la cellule B1, x_2 dans B2
- Ecrire l'objectif dans une cellule au choix. Par exemple, je choisis de mettre l'objectif $z=2x_1+3x_2$ dans B4. Dans B4, je mets la formule 2*B1+3*B2
- Pour chaque contrainte, on choisit une cellule pour le membre gauche et une cellule pour le membre droit. Par exemple, pour la contrainte $x_1+2x_2 \leq 4$, je choisis B6 pour le membre gauche et B8 pour le droit: dans B6 je mets la formule B1+2*B2 , dans B8 je mets la constante 4
- Une fois que le programme est écrit on clique sur le solveur

Solveur de Excel

- Quand on clique sur le solveur, il apparait une fiche que l'on renseigne
  - Cellule de l'objectif
  - Veut-on minimiser ou maximiser ?
  - Cellules des variables
  - Pour chaque contrainte, cellule du membre gauche, type de contraintes (<= , >= , =), cellule du membre droit. Faire une ligne par contrainte.
  - Cocher la case pour renseigner sur le signe des variables: pour rendre les variables positives ou nulle (case non cochée) ou sans signe (case cochée)
  - Sélection d'une résolution. Choisir Simplex PL
  - Cliquer enfin sur résoudre. Les résultats apparaissent dans la feuille Excel: valeurs des variables, de l'objectif et des membres gauches des contraintes

Solveur glpk – langage MathProg

- Plus pratique que Excel
- MathProg est un langage de modélisation
  - Vous transcrivez votre modèle mathématique en MathProg
- Le langage MathProg s'adresse au solveur glpk
  - Par exemple, vous écrivez le modèle sur la production de bière en MathProg dans un fichier *biere.txt*
  - Puis vous lancer la commande: glpsol –model *biere.txt*

Modèle production de bière en MathProg

biere.txt

```
# biere
var x1>=0;
var x2>=0;
maximize z: 15*x1 + 20*x2;
subject to
mais: 2.5*x1 + 7.5*x2 <= 240;
houblon: 0.125*x1 + 0.125*x2 <= 5;
malt: 17.5*x1 + 10*x2 <= 595;
solve;
display z, x1, x2;
```

Sur la ligne de commande taper : glpsol --model biere.txt

résultat

```
Display statement at line 10
z.val = 740
x1.val = 12
x2.val = 28
Model has been successfully processed
```

Conclusion

- Programmation Linéaire (PL) est le modèle de nombreux problèmes: économie, production, planification, transport
- Il y a des problèmes en variables continues et d'autres en variables entières
- Résolution à l'aide d'un solveur.
- Solveur de Excel. Simple à utiliser pour des petits problèmes.
- Il existe d'autres solveurs notamment des solveurs couplés avec des langages de modélisation qui permettent d'écrire le programme mathématique dans un format proche du langage mathématique (exemple MathProg-glpk)
- Comment fonctionnent ces solveurs ? Quels algorithmes de résolution contiennent-ils ?
- Existe-t-il une différence de traitement pour les problèmes en variables continues et les problèmes en variables entières ?