TD PLNE

Exercice 1. Procédure arborescente pour le problème d'affectation

On a n=4 tâches à exécuter par n=4 ouvriers. Le coût d'une tâche j dépend de l'ouvrier i qui l'exécute.

Les coûts sont donnés dans le tableau suivant. En ligne sont les ouvriers, en colonne les tâches.

Matrice coûts	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4
Ouvrier 1	8	3	1	5
Ouvrier 2	11	7	1	6
Ouvrier 3	7	8	6	8
Ouvrier 4	11	6	4	9

Il s'agit de trouver une affectation de chaque ouvrier à chaque tâche de coût minimum.

1° Combien coûtera au minimum la tâche 1, la tâche 2, la tâche 3, la tâche 4. En déduire une borne inférieure du coût total d'affection.

2° Calculer la solution optimale par énumération et représenter la recherche par une arborescence :

- au niveau 1, on affecte l'ouvrier 1 soit à la tâche 1, soit à la tâche 2,…, soit à la tâche4

- au niveau 2, on affecte l'ouvrier 2 aux tâches restantes

- au niveau 3, on affecte l'ouvrier 3 etc…

3° On va résoudre ce problème par une procédure arborescente de séparation n-aire.

La borne inférieure sera celle proposée à la question 1. On fera l'exploration de l'arborescence en meilleur d'abord c'est-à-dire que l'on sépare à partir du nœud pendant d'évaluation (i.e. de borne inférieure) minimum.

Exercice 2. Méthode arborescente pour le sac-à-dos en 0-1

Soit (P) le problème de sac-à-dos :

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Sous contraintes : $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0,1\}\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Où c_i, a_i, b sont des entiers naturels positifs : a_i est le poids de l'objet i, c_i sa valeur marchande, b la capacité du sac.

Soit (PR) la relaxation continue de (P) où les variables sont dans l'intervalle [0,1] : $x_i \in [0,1]\ i = 1, \dots, n$.

(PR) se résout polynomialement de la façon suivante :

-on trie les ratios $\frac{c_i}{a_i}$ i=1,….,n dans l'ordre décroissant. Ensuite, selon cet ordre, on met les objets dans le sac jusqu'à ce que l'on dépasse la capacité b. Le premier objet qui dépasse est mis fractionnaire.

- Supposons les objets indexés par ordre des ratios $\frac{c_i}{a_i}$ i=1,….,n décroissant. Soit i^* tel que $\sum_{i=1}^{i^*-1} a_i \leq b$ et $\sum_{i=1}^{i^*} a_i > b$, on pose :

$$\begin{cases} x_i = 1 \quad i = 1, \dots, i^* - 1 \\ x_{i^*} = \dfrac{b - \sum_{i=1}^{i^*-1} a_i}{a_{i^*}} \\ x_i = 0 \quad i \geq i^* + 1 \end{cases}$$

- On considère l'instance de (P) suivante :

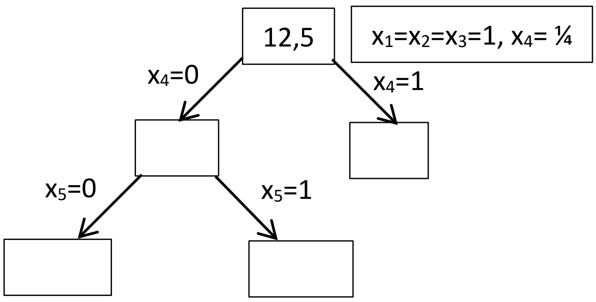
i	1	2	3	4	5
c_i	5	4	3	2	1
a_i	1	2	3	4	5

b=7

Par exemple, la relaxation continue de ce problème donne 12,5 obtenue par $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=$ ¼

On veut résoudre (P) par une méthode arborescente où l'évaluation (majorant) d'un sous-problème d'un nœud de l'arborescence de recherche est obtenue par la résolution de la relaxation continue du sous-problème, et où le parcours de l'arborescence se fait en meilleur d'abord.

Q1 - Compléter l'arborescence suivante et indiquer là où vous trouvez une solution :



Q2 - Est-il nécessaire de développer plus cette arborescence et pourquoi ?

Q3 - Donner la solution optimale du problème.

- On considère l'instance de (P) suivante :

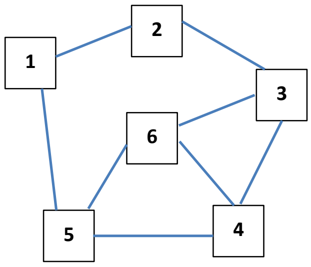
i	1	2	3	4	5
c_i	8	16	20	12	1
a_i	3	7	9	6	1

b=17

Résoudre (P) par une méthode arborescente où l'évaluation (majorant) d'un sous-problème d'un nœud de l'arborescence de recherche est obtenue par la résolution de la relaxation continue du sous-problème, et où le parcours de l'arborescence se fait en meilleur d'abord.

Exercice 3. Méthode arborescente pour le problème du stable de poids maximum

On considère le problème du stable dans un graphe. Soit un graphe, non orienté, G=(X,E) avec X les sommets, E les arêtes. Un stable S est un ensemble de sommets qui ne sont pas reliés 2 à 2 par une arête. Les sommets de G sont munis de poids. On veut trouver un ensemble stable S de poids maximum. On considère le problème sur le graphe suivant :



Les poids sont les suivants :

sommets	1	2	3	4	5	6
poids	2	2	4	2	2	4

1° Modéliser le problème par un PLNE avec les variables 0-1 x_i $i \in X$ telle que $x_i=1$ si le sommet i est mis dans S et $x_i=0$ sinon. On mettra une contrainte par arête du graphe soit 8 contraintes.

2° On va résoudre ce problème en 0-1 par une méthode arborescente. Rappelons que c'est un problème de maximisation. Les UB (bornes supérieures) seront donc données par la relaxation continue. La séparation sur les variables fractionnaires se fera en commençant par celle de plus petit indice : par exemple, si x_1 et x_2 sont fractionnaires à une étape donnée, on séparera sur x_1. Le parcours de l'arborescence de recherche se fera en meilleur d'abord.

2.1. La relaxation continue du PLNE donne $x_i=1/2$ pour i=1 à 6. En déduire une borne supérieure de la valeur du stable de poids max.

2.2.

- On fixe $x_1=0$, la relaxation continue donne $x_i=1/2$ pour i=2 à 6. En déduire une borne supérieure de la valeur du stable de poids max si le sommet 1 n'est pas dans le stable.

- On fixe $x_1=1$, la relaxation continue donne $x_2= x_5=0$, $x_3= x_4= x_6=1/2$. En déduire une borne supérieure de la valeur du stable de poids max si le sommet 1 est dans le stable.

- Tracer l'arborescence obtenue jusque là.

2.3

- On fixe $x_1=x_2=0$, la relaxation continue donne $x_3= x_5=1$ et $x_4= x_6=0$. En déduire une solution du problème du stable de poids max et la valeur de cette solution.

- On fixe $x_1=0$, $x_2=1$, la relaxation continue donne $x_3=x_4=x_5=0$ et $x_6=1$. En déduire une solution du problème du stable de poids max et la valeur de cette solution.

- Tracer l'arborescence obtenue jusque là. Peut-on stopper la recherche ?

2.4

- On fixe $x_1=1$, $x_3=0$, la relaxation continue donne $x_2=x_4=x_5=0$ et $x_6=1$. En déduire une solution du problème du stable de poids max et la valeur de cette solution.

- On fixe $x_1=1$, $x_3=1$, la relaxation continue donne $x_2=x_4=x_5=x_6=0$. En déduire une solution du problème du stable de poids max et la valeur de cette solution.

- Tracer l'arborescence obtenue jusque là. Peut-on stopper la recherche ?

- Combien a-t-on trouvé de solutions optimales au problème du stable de poids maximum ?

Exercice 4. Coupe de Chvatal

On considère le problème du stable dans un graphe. Soit un graphe, non orienté, G=(X,E) avec X les sommets, E les arêtes. Un stable S est un ensemble de sommets qui ne sont pas reliés 2 à 2 par une arête. Les sommets de G sont munis de poids. On veut trouver un ensemble stable S de poids maximum.

1- On considère un graphe qui est un cycle de n sommets avec n impair. Modéliser le problème par un PLNE avec les variables 0-1 x_i $i\in X$ telle que $x_i=1$ si le sommet i est mis dans S et $x_i=0$ sinon. On mettra une contrainte par arête du graphe.

2-Montrer avec une coupe de Chvatal que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n-1}{2}$ est une inégalité valide. Cette inégalité est appelée *inégalité de cycle impair*.