

Programmation linéaire

Composition d'aliments pour le bétail

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus 3 produits bruts : orge, arachide, sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéines et 3,6% de graisses. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus respectivement dans l'orge, l'arachide et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts.

Produit brut	1. Orge	2. Arachides	3. Sésame	Pourcentage requis
Pourcentage de protéines	12%	52%	42%	22%
Pourcentage de graisses	2%	2%	10%	3,6%
Coût par tonne	25	35	30	

1-On notera x_i $i=1,2,3$, la fraction de tonne de produit brut i contenu dans 1 tonne d'aliment. La somme de ces variables doit donc faire 1. Formuler le problème.

2-Eliminer la variable x_1 , puis résoudre le problème graphiquement.

Problème de production

Une usine fabrique 2 produits liquides P1 et P2.

Chaque litre de ces produits demande des heures de fabrication sur les machines A,B,...,F. comme indiqué sur le tableau suivant. Chaque machine n'est disponible qu'un certain nombre d'heures dans la semaine.

	A	B	C	D	E	F
P1	0	1,5	4	5	3	3
P2	3	2	3	2	4	0
Disponibilité	30	30	60	50	60	60

Chaque litre de produit P1 rapporte 1600 euros et chaque litre de produit P2 3200 euros. On veut trouver la production par semaine qui maximise le gain total.

1-Ecrire le programme linéaire correspondant avec x_1 et x_2 la quantité en litre produite de P1 et de P2.

Résolution de programmes linéaires par la méthode des tableaux du simplexe

- Soit le programme linéaire :

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

Sous les contraintes $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ et
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \end{cases}$$

1-Rajouter les variables d'écart (positives ou nulles). Puis résoudre le problème par l'algorithme du simplexe et la méthode des tableaux.

2-Pour vérifier le résultat de la question précédente, résoudre le problème (à 2 variables x_1, x_2) graphiquement.

- Soit le programme linéaire :

$$\max z = -x_1 + 3x_2$$

Sous les contraintes $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ et
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1-Rajouter les variables d'écart (positives ou nulles). Puis résoudre le problème par l'algorithme du simplexe et la méthode des tableaux.

2-Pour vérifier le résultat de la question précédente, résoudre le problème (à 2 variables x_1, x_2) graphiquement.

Crème glacée : démarrage à partir d'une base donnée

Un fabricant désire produire 100kg d'une préparation pour crème glacée. Cette préparation doit contenir 21,5kg de matières grasses, 21kg de sucre, 1,2kg d'œuf et 56,3 kg d'eau. Les ingrédients dont il dispose figurent en tête des colonnes du tableau ci-dessous, les constituants figurent en ligne. Ce tableau donne les pourcentages en poids de chaque constituant dans chaque ingrédient ainsi que le coût par kg de chaque ingrédient.

	crème	jaune d'oeuf frais	lait entier en poudre	jaune d'oeuf surgelé et sucré	sirop de sucre de canne	eau
matières grasses	40	50	12	30		
sucre				14	70	
oeuf		40		40		
eau	60	10	88	16	30	100
coût	3	4	1	2	0,80	0

Le fabricant désire déterminer la composition du mélange d'ingrédients de coût minimal et respectant les contraintes sur les constituants (matières grasses, sucre, œuf et eau).

1- Modéliser le problème par un programme linéaire comportant 6 variables $x_1, \dots, x_6$ représentant les quantités d'ingrédients (crème, jaune d'œuf frais, ..., eau) utilisées et 4 contraintes d'égalité.

2- Jusqu'à présent le fabricant produisait le mélange suivant :

crème = 50kg., Jaune d'œufs frais = 3kg., sirop de sucre de canne = 30kg., eau = 17kg.

Cette solution est-elle une solution de base ? Pour cela chercher la matrice B associée. On admettra

que la matrice suivante est inversible $B = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

a-A l'aide des 4 contraintes du problème, exprimer x_1, x_2, x_5, x_6 en fonction de x_3, x_4 .

On note z la fonction objectif représentant le coût du mélange. Exprimer alors z en fonction de x_3, x_4 . En déduire le tableau simplexe relativement à cette base. Le mélange est-il optimal ?

b-Même question en utilisant la méthode matricielle et l'inverse de B donné ci-dessous.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/0,4 & 0 & -0,5/0,16 & 0 \\ 0 & 0 & 1/0,4 & 0 \\ 0 & 1/0,7 & 0 & 0 \\ -0,6/0,4 & -0,3/0,7 & 0,26/0,16 & 1 \end{pmatrix}$$

3- Soit le tableau simplexe suivant :

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_1	1	0	0,3	-0,5	0	0	=	50
x_2	0	1	0	1	0	0	=	3
x_5	0	0	0	0,2	1	0	=	30
x_6	0	0	0,7	0,3	0	1	=	17
	0	0	0,1	-0,66	0	0	=	-186 + z

Déterminer la composition du mélange optimal en appliquant l'algorithme du simplexe à partir de ce tableau.

4-Par suite de fluctuations économiques les prix de la crème et du jaune d'œuf frais passent respectivement de 4 à 7. Le mélange déterminé à la question 3 est-il toujours de coût minimal ?

Trouver une base initiale : méthode des 2 phases

Soit le programme linéaire (P) suivant :

$$\max z = x_1 + x_2$$

Sous les contraintes $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ et $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$

1-Ecrire le problème sous forme standard en rajoutant 3 variables d'écart (jamais négatives). Faire attention au signe de la première.

2-La solution $x_1 = x_2 = 0$ autrement dit x_1, x_2 hors-base est-elle une solution de base réalisable ?

3-Résoudre (P) en utilisant la méthode des 2 phases.