Modélisations du problème du voyageur de commerce Application au jeu du serpent

ESP (Ecole Supérieure Polytechnique) de Dakar

Optimisation en informatique - Jeux

Alain Faye

Contenu

- Définition du problème du voyageur de commerce
- Modélisation 1 du voyageur de commerce
  – Sous-tour
  – Inégalités d'élimination de sous-tour
  – Formulation MTZ
- Modélisation 2 du voyageur de commerce
  – Formulation quadratique
  – Linéarisation
- Liens avec le problème du serpent

Problème du voyageur de commerce

n villes
Passer une fois et une seule par chaque ville
tout en minimisant la distance totale parcourue

Etant donné un graphe orienté G=(V,U)
V = sommets (villes), U=arcs (routes)
Chercher un circuit hamiltonien
i.e. un circuit passant par tous les sommets de G une et une seule fois et de coût minimum

Modélisation 1

Modélisation 1

Etant donné un graphe orienté G=(V,U) V=sommets (villes), U=arcs (routes)

$$\min \sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j:(j,i)\in U} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in U \quad (1)$$

$$\sum_{j:(i,j)\in U} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in U \quad (2)$$

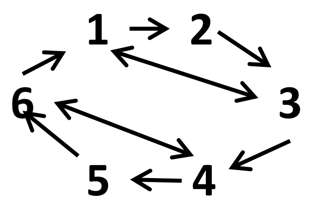
X_{ij} = 1 si l'arc (i,j) est dans le circuit hamiltonien
X_{ij} = 0 sinon

(1) Dans chaque ville, i il rentre un arc (le voyageur rentre dans i)
(2) De chaque ville i, il sort un arc (le voyageur sort de i)

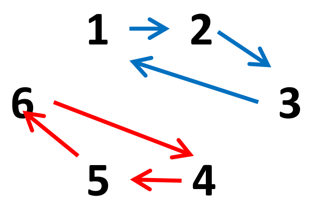
Les sous-tours

Les contraintes (1) et (2) sont insuffisantes car elles peuvent donner des sous-tours

Exemple :
Soit le graphe suivant avec n=6 sommets



La solution suivante induit 2 sous-tours
$X_{12}=1$, $X_{23}=1$, $X_{31}=1$
$X_{45}=1$, $X_{56}=1$, $X_{64}=1$



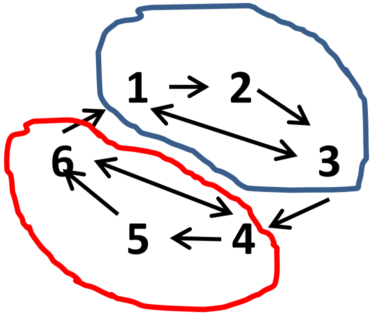
Eliminer les sous-tours

<u>Inégalités pour éliminer les sous-tours</u>

$$\sum_{(i,j)\in U: i\in V', j\in V'} x_{ij} \leq |V'| - 1 \quad \forall V' \subset V \quad 2 \leq |V'| \leq n-2$$

Exemple V'={1,2,3} $X_{12}+X_{23}+X_{31}+X_{13} \leq 2$

V'={4,5,6} $X_{45}+X_{56}+X_{64}+X_{46} \leq 2$



Nombre exponentiel d'inégalités d'élimination de sous-tour
Nombre de façons de choisir V'

Génération dynamique des inégalités d'élimination de sous-tour

Nombre exponentiel d'inégalités d'élimination de sous-tours
On ne peut pas toutes les mettre dans le modèle

<u>Algo. de génération dynamique des inégalités</u>

Ineg_sstour=∅
A-Résoudre le problème avec les contraintes (1) et (2) et Ineg_sstour
B-Recherche d' un sous-tour
   Si pas trouvé
      Alors il n'y a pas de sous-tour, le problème est résolu STOP
      Sinon -soit V' les sommets du sous-tour
              -ajouter à Ineg_sstour l'inégalité d'élimination de sous-tour construite avec V'
              -retourner en A

Formulation compacte MTZ

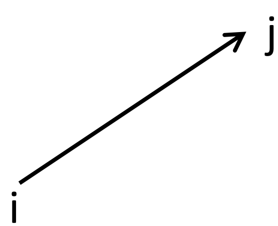
(Miller, Tucker, Zemlin)

<u>Autre méthode pour éliminer les sous-tours</u>

On rajoute variables u_i et contraintes suivantes:

$$u_i + x_{ij} - M\left(1 - x_{ij}\right) \leq u_j \; \forall (i, j) \in U, j \neq 1$$

On suppose que le sommet 1 est le départ du circuit



X_{ij}=1 on prend l'arc (i,j)

Dans ce cas $U_i+1 \leq U_j$

$X_{ij}=0 \;\Rightarrow U_i - M \leq U_j$
L'inégalité devient inactive si M suffisamment grand

Exemple: X_{45}=1, X_{56}=1, X_{64}=1 est éliminé car sinon $U_4<U_5<U_6<U_4$

Modélisation 2

Modélisation 2

Etant donné un graphe orienté G=(V,U) V=sommets (villes), U=arcs (routes)

$$\min \sum_{i=1,\ldots n,(j,k)\in U} b_{jk} x_{ij} x_{i(mod\, n)+1,k}$$

$$\sum_{i=1,\ldots,n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \quad (3)$$

$$\sum_{j=1,\ldots,n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n \quad (4)$$

$$x_{ij} + x_{i\,(mod\, n)\,+1,k} \leq 1 \quad i = 1, \ldots, n \quad j,k = 1 \ldots n \quad j \neq k \ (j,k) \notin U \quad (5)$$

X_{ij} = 1 si ville j est en position i

= 0 sinon

(3) Chaque ville j est dans une position

(4) Chaque position i contient une ville

(5) Si pas d’arc (j,k), j et k ne peuvent pas être dans 2 positions consécutives

- Objectif quadratique
- Possible de « linéariser »
  - différentes façons
  - Par exemple, introduire variable y_{ijk} qui remplace le produit $x_{ij}x_{(i+1)k}$ et rajouter contraintes liant y et x

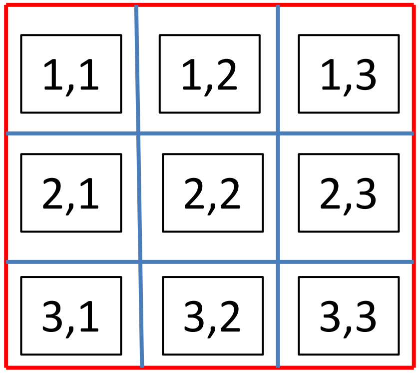
Le problème du serpent

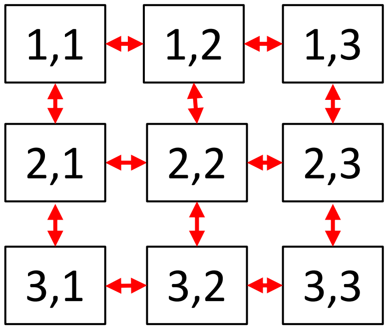
Le problème du serpent

Le problème du serpent peut être vu comme un problème de voyageur de commerce particulier avec les spécificités suivantes:

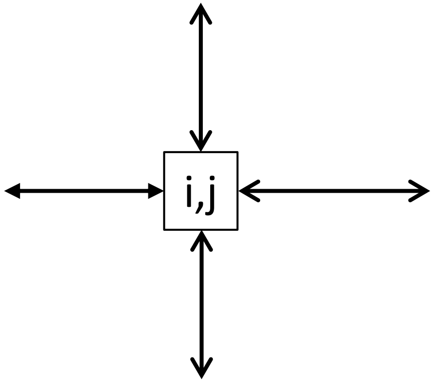
- Un graphe grille
- Tous les sommets ne font pas partie du circuit (circuit non hamiltonien)
- Contraintes de projection: nombre de sommets parcourus en ligne et en colonne
- Il n’y a pas de longueur à minimiser

Transformer la grille en graphe grille





Une case devient un sommet du graphe
Une case i,j a (au plus) 4 voisins



Conclusion

- Nous avons présenté deux modèles pour le voyageur de commerce
- Le premier est linéaire. Il faut par contre éliminer les sous-tours par des inégalités valides ou la formulation MTZ
- Le deuxième est quadratique. On peut linéariser avec peu de variables et de contraintes supplémentaires
- Les modèles présentés peuvent être adaptés au cas du problème du serpent