Modélisations du problème du voyageur de commerce

MPRO - RORT

Alain Faye

Contenu

- Définition du problème du voyageur de commerce
- Modélisation 1 du voyageur de commerce
  - Sous-tour
  - Inégalités d'élimination de sous-tour
  - Formulation MTZ
- Modélisation 2 du voyageur de commerce
  - Formulation quadratique
  - Linéarisation

Problème du voyageur de commerce

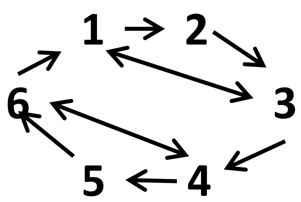
n villes
Passer une fois et une seule par chaque ville
tout en minimisant la distance totale parcourue

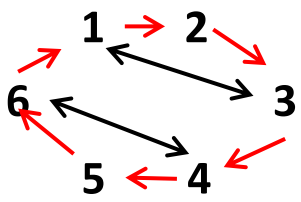
Modélisation graphe:

Etant donné un graphe orienté G=(V,U) V=sommets (villes), U=arcs (routes)
Chercher un circuit <u>hamiltonien</u>
i.e. un circuit passant par tous les sommets de G une et une seule fois
de coût minimum

Exemple

Exemple :
Soit le graphe suivant avec n=6 sommets





Circuit hamiltonien en rouge

Modélisation

Etant donné un graphe orienté G=(V,U) V=sommets (villes), U=arcs (routes)

$$\min \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j:(j,i)\in U} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in U \quad (1)$$

$$\sum_{j:(i,j)\in U} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in U \quad (2)$$

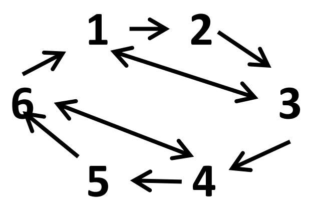
X_{ij}=1 si l'arc (i,j) est dans le circuit hamiltonien
X_{ij}=0 sinon
(1) Dans chaque ville, i il rentre un arc (le voyageur rentre dans i)
(2) De chaque ville i, il sort un arc (le voyageur sort de i)

Les sous-tours

Les contraintes (1) et (2) sont insuffisantes car elles peuvent donner des sous-tours

Exemple :

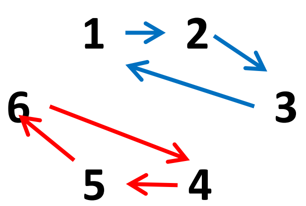
Soit le graphe suivant avec n=6 sommets



La solution suivante induit 2 sous-tours

$X_{12}=1$, $X_{23}=1$, $X_{31}=1$

$X_{45}=1$, $X_{56}=1$, $X_{64}=1$



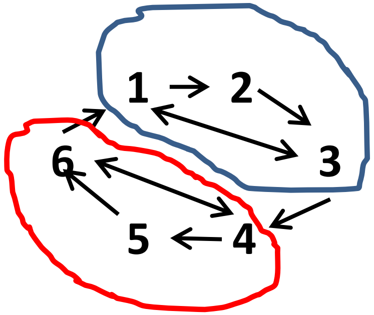
Eliminer les sous-tours

<u>Inégalités pour éliminer les sous-tours</u>

$$\sum_{(i,j)\in U: i\in V', j\in V'} x_{ij} \leq |V'| - 1 \quad \forall V' \subset V \quad 2 \leq |V'| \leq n-2$$

Exemple $V'=\{1,2,3\}$ $X_{12}+X_{23}+X_{31}+X_{13} \leq 2$

$V'=\{4,5,6\}$ $X_{45}+X_{56}+X_{64}+X_{46} \leq 2$

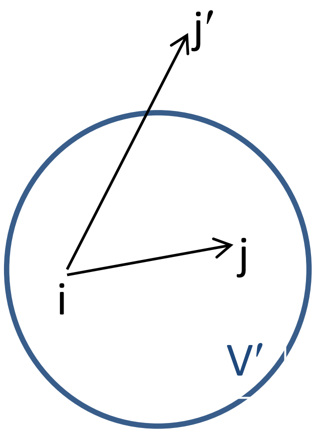


Nombre exponentiel d'inégalités d'élimination de sous-tour
Nombre de façons de choisir V'

Inégalité de sous-tour $\Leftrightarrow$ Inégalité de coupe

Inégalité de sous-tour

$$\sum_{(i,j)\in U: i\in V', j\in V'} x_{ij} \leq |V'| - 1 \;\; V' \subset V$$



Égalités (2)

$$\sum_{j\in V \;\; : (i,j)\in U} x_{ij} = 1 \;\; \forall i \in V'$$

somme (2) $i \in V'$ - sous-tour, on obtient inégalité de coupe

$$\sum_{(i,j)\in U: i\in V', j\in V\setminus V'} x_{ij} \geq 1 \;\; V' \subset V$$

Génération dynamique des inégalités d'élimination de sous-tour

Nombre exponentiel d'inégalités d'élimination de sous-tours
On ne peut pas toutes les mettre dans le modèle

Algo. de génération dynamique des inégalités

Ineg_sstour=$\emptyset$
A-Résoudre le problème avec les contraintes (1) et (2) et Ineg_sstour
B-Recherche d' un sous-tour
  Si pas trouvé
    Alors il n'y a pas de sous-tour, le problème est résolu STOP
    Sinon -soit V' les sommets du sous-tour
      -ajouter à Ineg_sstour l'inégalité d'élimination de sous-tour construite avec V'
      -retourner en A

Formulation compacte MTZ

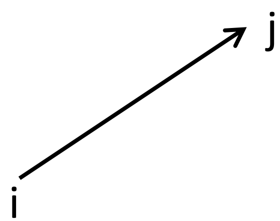
(Miller, Tucker, Zemlin)

<u>Autre méthode pour éliminer les sous-tours</u>

On rajoute variables u_i et contraintes suivantes:

$$u_i + x_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq u_j \ \forall (i,j) \in U, j \neq 1$$

On suppose que le sommet 1 est le départ du circuit



X_{ij}=1 on prend l'arc (i,j)

Dans ce cas $U_i+1 \leq U_j$

$X_{ij}=0 \Rightarrow U_i - M \leq U_j$

L'inégalité devient inactive si M suffisamment grand

Exemple: X_{45}=1, X_{56}=1, X_{64}=1 est éliminé car sinon $U_4<U_5<U_6<U_4$

Trouver M le plus petit possible

Si on démarre à 0 : $u_1=0$

$X_{ij}=0 \Rightarrow U_i-M\leq U_j \quad j\neq 1$

Au pire $n-1 - M \leq 1$
Et donc $n-2 \leq M$

On peut prendre $M = n-2$

Modélisation quadratique voyageur de commerce

Etant donné un graphe orienté G=(V,U) V=sommets (villes), U=arcs (routes)

$$\min \sum_{i=1,\ldots n,(j,k)\in U} c_{jk} x_{ij} x_{i(mod\ n)+1,k}$$

$$\sum_{i=1,\ldots,n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \quad (3)$$

$$\sum_{j=1,\ldots,n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n \quad (4)$$

$$x_{ij} + x_{i\ (mod\ n)\ +1,k} \leq 1 \quad i = 1, \ldots, n \ \ j, k = 1 \ldots n \ \ j \neq k \ (j,k) \notin U \ \ (5)$$

X_{ij}=1 si ville j est en position i
=0 sinon

(3) Chaque ville j est dans une position

(4) Chaque position i contient une ville

(5) Si pas d'arc (j,k), j et k ne peuvent pas être dans 2 positions consécutives

- Exercice:

Proposer une amélioration de la contrainte (5) sachant que, par la contrainte (4), dans une position (i+1) il n’y a qu’une ville

Linéarisation de fonction quadratique en variables binaires

Linéarisation de Glover

$$f(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} q_{ij}x_i x_j$$ Supposons $q_{ij} \geq 0$ $x_i = 0 \; ou \; 1 \quad i = 1, \dots, n$

1- On ajoute variable z_i $\left(= x_i \sum_{1\leq j\leq n} q_{ij}x_j\right)$

2- On ajoute contraintes linéaires

$$0 \leq z_i \leq \sum_{1\leq j\leq n} q_{ij}x_j$$

$$\sum_{1\leq j\leq n} q_{ij}x_j - M(1-x_i) \leq z_i \leq Mx_i$$

M majorant de $\sum_j q_{ij}x_j$

Sous ces conditions $z_i = x_i \sum_{1\leq j\leq n} q_{ij}x_j$ et $f(x) = \sum_{1\leq i\leq n} z_i$

Linéarisation de Glover pour le voyageur de commerce

z_{ij} modélise le produit $x_{ij} \times \sum_{k:(j,k)\in U} x_{i+1,k} c_{jk}$

$$0 \leq z_{ij} \leq \sum_{k:(j,k)\in U} x_{i+1,k} c_{jk} \qquad \sum_{k:(j,k)\in U} x_{i+1,k} c_{jk} - M(1 - x_{ij}) \leq z_{ij} \leq M x_{ij}$$

M majorant de $\sum_{k:(j,k)\in U} x_{i+1,k} c_{jk}$

- M=$\sum_{k:(j,k)\in U} c_{jk}$
- M=$\max_{k:(j,k)\in U} c_{jk}$ Ce dernier est valide car j aura un seul successeur

Conclusion

- Nous avons présenté deux modèles pour le voyageur de commerce
- Le premier est linéaire. Il faut par contre éliminer les sous-tours par des inégalités valides ou la formulation MTZ
- Le deuxième est quadratique. On peut linéariser avec peu de variables et de contraintes supplémentaires