Problème du Voyageur de commerce - TSP

Held and Karp relaxation

Université Virtuelle du Sénégal

Mastère HPC

Alain Faye

Présentation du TSP

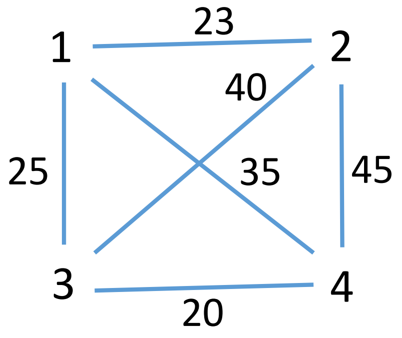
- K_n graphe complet de n sommets
- V={1,2,…,n} sommets du graphe
- Sommets = clients
- Coûts (poids) sur les arêtes = coûts de trajet entre 2 clients
- Un tour = visite des n clients = graphe partiel connexe de K_n de degré 2 pour chaque sommet
- Trouver un tour de coût minimum

UNIVERSITE VIRTUELLE DU SENEGAL
foo nekk foofu la

ensiie
PARIS - ÉVRY

Exemple

n=4



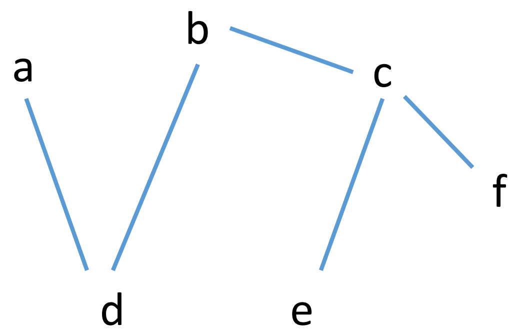
Tour 1-4-2-3-1 coût 35+45+40+25=145

Tour 1-2-3-4-1 coût 23+40+20+35=118

Tour 1-3-4-2-1 coût 25+20+45+23=113

Arbre

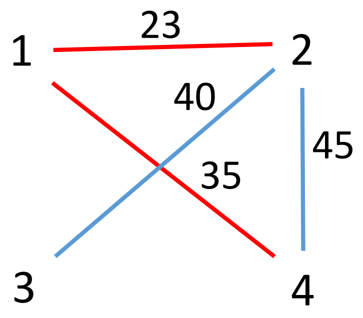
- Un arbre est un graphe connexe sans cycle
- Un arbre de *n* sommets contient *n*-1 arêtes



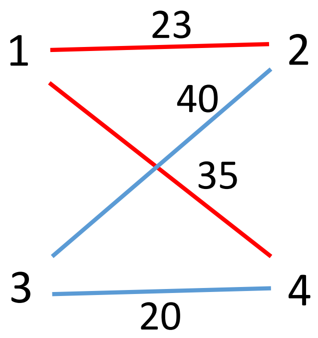
Arbre de 6 sommets a,b,…,f
5 arêtes

1-Arbre

- 1-arbre
  - Graphe partiel de K_n
  - Arbre couvrant les sommets 2,3,…,n
  - Sommet 1 de degré 2
- Un 1-arbre de degré 2 pour tous les sommets est un tour



1-arbre de coût 143



1-arbre de coût 118

Modélisation TSP

$$\min \sum_{A \in 1\_T} c_A \chi_A$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{A \in 1\_T} d_A(v)\chi_A = 2 \quad v = 2, \dots, n \\ \sum_{A \in 1\_T} \chi_A = 1 \quad (Convexity) \\ \chi_A \in \{0,1\} \quad \forall A \in 1\_T \end{cases}$$

- 1_T est l'ensemble des 1-arbres de K_n
- c_A coût du 1_arbre A et $d_A(v)$ degré de v dans le 1_arbre A
- χ_A=1 si on choisit le 1_arbre A
- La contrainte *Convexity* = on choisit un unique 1-arbre

Relaxation continue

- Nombre de 1-arbres est exponentiel
- Nombre exponentiel de variables χ_A
- Problème en 0-1 NP-difficile
- On va résoudre la relaxation continue
- On obtiendra au moins une borne inférieure

UNIVERSITE VIRTUELLE DU SENEGAL
foo nekk foofu la

ensiie
PARIS - ÉVRY

Résolution de la relaxation continue

- Algorithme du simplexe

- La résolution se décompose en

  - Problème maître

  - Sous-problème : recherche de la variable χ_A de coût réduit minimum

UNIVERSITE VIRTUELLE DU SENEGAL
foo nekk foofu la

ensiie
PARIS - ÉVRY

Problème maître

- T’ est un sous-ensemble de 1_T

$$\min \sum_{A \in T'} c_A \chi_A$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{A \in T'} d_A(v)\chi_A = 2 \quad v = 2, \dots, n \\ \displaystyle\sum_{A \in T'} \chi_A = 1 \quad (Convexity) \\ \chi_A \geq 0 \quad \forall A \in T' \end{cases}$$

- On note
  - λ_v *v*=2,…,n variables duales des contraintes de degré
  - η variable duale de la contrainte *Convexity*

Coût réduit d’une variable

- E = les arêtes du graphe complet
- $x_e \in \{0,1\}$ $x_e = 1$ si et seulement si l’arête *e* est dans le 1-arbre A
- $c_A = \sum_{e \in E} c_e x_e$
- $d_A(v) = \sum_{e \in \delta(v)} x_e$ où δ(v) est l’ensemble des arêtes incidentes à v
- Coût réduit de χ_A :
  - $c_A - \sum_{v=2}^{n} d_A(v)\lambda_v - \eta =$
  - $\sum_{e \in E} c_e x_e - \sum_{v=2}^{n} \sum_{e \in \delta(v)} x_e \lambda_v - \eta =$
  - $\sum_{e=(u,v) \in E} (c_e - \lambda_u - \lambda_v) x_e - \eta$
  - En posant $\lambda_1 = 0$

Résolution du sous-problème

- Le sous-problème est trouver une variable de coût réduit minimum

- Revient à chercher un 1_arbre de poids minimum au sens des poids $c_e - \lambda_u - \lambda_v$ pour toute arête e=(u,v)

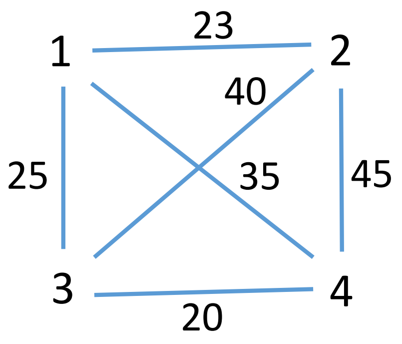
- Résolution
  - Algorithme polynomial basé sur la recherche d'arbre couvrant de poids minimum: algorithme de Prim ou de Kruskal

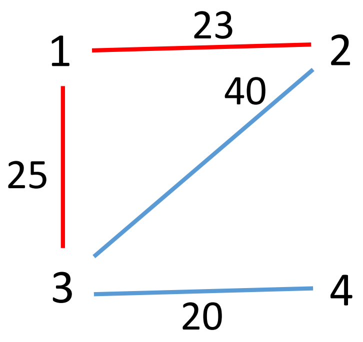
UNIVERSITE VIRTUELLE DU SENEGAL
foo nekk foofu la

ensiie
PARIS - ÉVRY

Résolution sous-problème par algorithme polynomial

- Recherche arbre couvrant les sommets v=2,…,n de poids minimum
- Ajouter les 2 arêtes de poids minimum incidentes au sommet 1

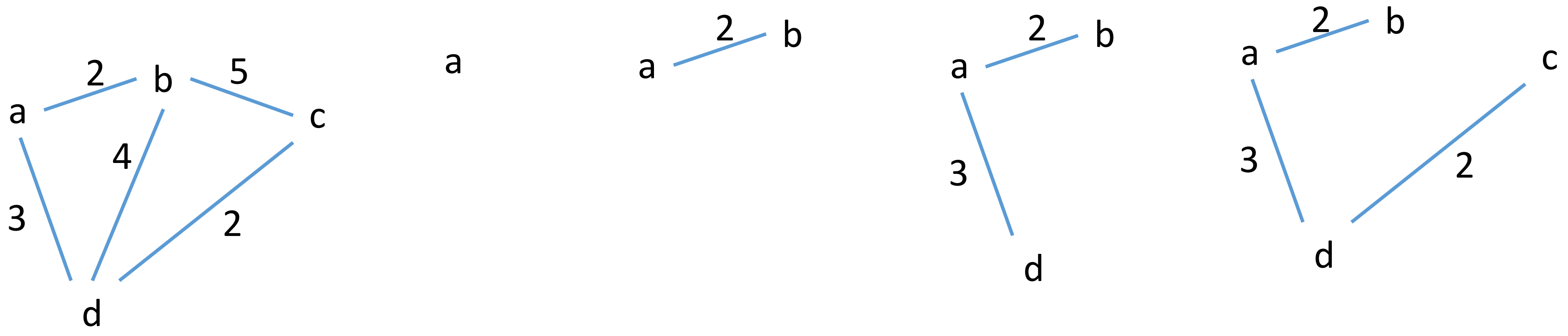




Poids = 23+25+40+20=108

Arbre couvrant de poids minimum: algorithme de Prim

- T = un sommet de V
- Tant que T$\neq$V
  - Ajouter l'arête (u,v) de poids minimum entre T et V\T (u$\in$T et v$\in$V\T)
  - T=T$\cup${v}



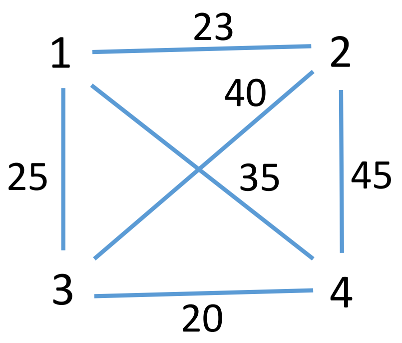
Algorithme de génération de colonnes

- Initialisation: mettre une colonne dans le programme maître
  - Mettre une colonne qui soit un tour, par exemple 1,2,3,…,n, afin que le programme maître admette une solution (contraintes de degré satisfaites)
- Itérations:
  1. Résoudre le programme maître
  2. Chercher une variable de coût réduit minimum
  3. Si on a trouvé une variable de coût réduit négatif , la rajouter au programme maître et aller en 1.
  4. Si toutes les variables ont un coût réduit$\geq$0 STOP

Borne inférieure – Critère d’arrêt

- Notons V_{PM} la valeur de l’objectif du problème maître à une itération quelconque
- Une borne inférieure est LB = V_{PM} + coût réduit minimum
- Attention borne inférieure non monotone au cours des itérations de l’algorithme de génération de colonnes (elle peut baisser).
- Donc, à chaque itération il faut faire un test pour garder la meilleure borne inférieure c’est-à-dire la plus haute
- Si lors de la résolution du sous-problème on trouve un tour de coût égal à la borne inférieure alors ce tour est solution optimale du TSP
- Ceci est un critère d’arrêt de l’algorithme de génération de colonnes

Déroulement d'un exemple – itération 0

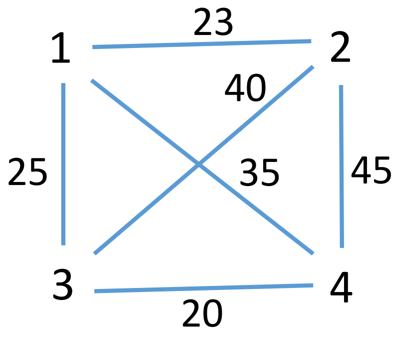


Tour 1-2-3-4-1 coût 118

Programme maître

Min 118 x_a
Subject to
 contr_degre[2] : 2 x_a == 2
 contr_degre[3] : 2 x_a == 2
 contr_degre[4] : 2 x_a == 2
 contr_convexity : x_a == 1
 x_a >= 0

Déroulement d’un exemple – itération 0



Tour 1-2-3-4-1 coût 118

Valeur objectif: 118.0
var duale convexity 0.0
var duales des contraintes degré
degre_2 59.0
degre_3 0.0
degre_4 0.0

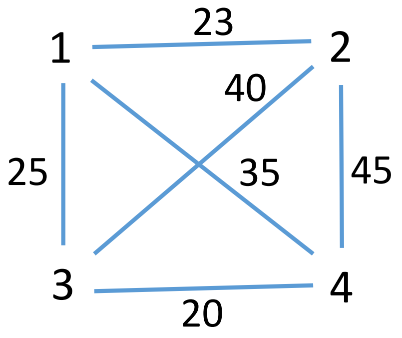
Nouveaux coûts

0.0	-36.0	25.0	35.0
-36.0	0.0	-19.0	-14.0
25.0	-19.0	0.0	20.0
35.0	-14.0	20.0	0.0

Programme maître

Min 118 x_a
Subject to
contr_degre[2] : 2 x_a == 2.0
contr_degre[3] : 2 x_a == 2.0
contr_degre[4] : 2 x_a == 2.0
contr_convexity : x_a == 1.0
x_a >= 0.0

Déroulement d’un exemple – itération 0



Tour 1-2-3-4-1 coût 118

Valeur objectif: 118.0
var duale convexity 0.0
var duales des contr. degré: degre_2 59.0 degre_3 0.0 degre_4 0.0

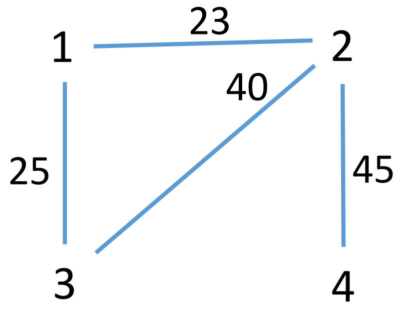
Nouveaux coûts

0.0	-36.0	25.0	35.0
-36.0	0.0	-19.0	-14.0
25.0	-19.0	0.0	20.0
35.0	-14.0	20.0	0.0

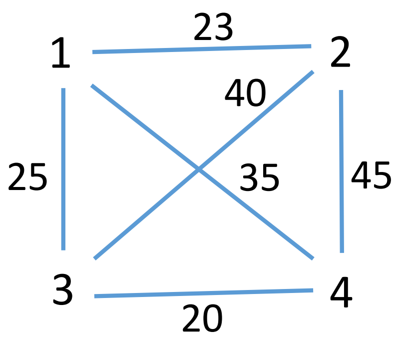
Programme maître

Min 118 x_a
Subject to
contr_degre[2] : 2 x_a == 2.0
contr_degre[3] : 2 x_a == 2.0
contr_degre[4] : 2 x_a == 2.0
contr_convexity : x_a == 1.0
x_a >= 0.0

Coût réduit =-36+25-19-14-0=-44
Coût=133
LB=118-44=74



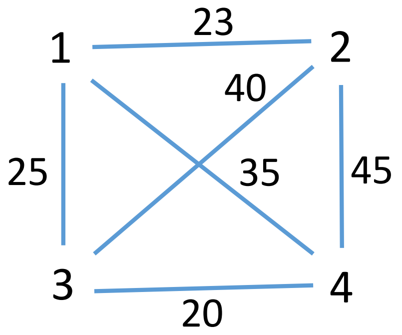
Déroulement d'un exemple – itération 1



Programme maître

Min 118 x_a + 133 x[1]
Subject to
contr_degre[2] : 2 x_a + 3 x[1] == 2
contr_degre[3] : 2 x_a + 2 x[1] == 2
contr_degre[4] : 2 x_a + x[1] == 2
contr_convexity : x_a + x[1] == 1
x[1] >= 0
x_a >= 0

Déroulement d’un exemple – itération 1



Valeur objectif: 118.0
var duale convexity 0.0
var duales des contraintes degré
degre_2 37.0
degre_3 0.0
degre_4 22.0

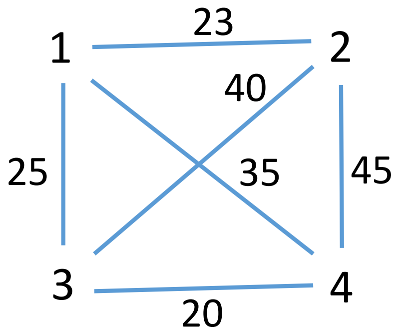
Programme maître

Min 118 x_a + 133 x[1]
Subject to
contr_degre[2] : 2 x_a + 3 x[1] == 2
contr_degre[3] : 2 x_a + 2 x[1] == 2
contr_degre[4] : 2 x_a + x[1] == 2
contr_convexity : x_a + x[1] == 1
x[1] >= 0
x_a >= 0

Nouveaux coûts

0.0	-14.0	25.0	13.0
-14.0	0.0	3.0	-14.0
25.0	3.0	0.0	-2.0
13.0	-14.0	-2.0	0.0

Déroulement d'un exemple – itération 1



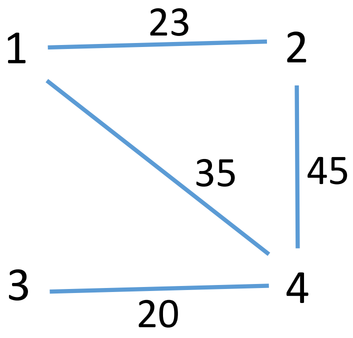
Valeur objectif: 118.0
var duale convexity 0.0
var duales des contr. degré: degre_2 37.0 degre_3 0.0 degre_4 22.0
Nouveaux coûts

0.0	-14.0	25.0	13.0
-14.0	0.0	3.0	-14.0
25.0	3.0	0.0	-2.0
13.0	-14.0	-2.0	0.0

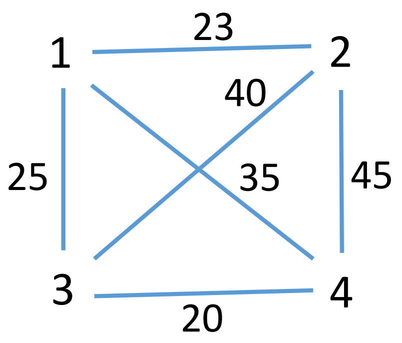
Programme maître

Min 118 x_a + 133 x[1]
Subject to
contr_degre[2] : 2 x_a + 3 x[1] == 2
contr_degre[3] : 2 x_a + 2 x[1] == 2
contr_degre[4] : 2 x_a + x[1]   == 2
contr_convexity : x_a + x[1]   == 1
x[1] >= 0
x_a >= 0

Coût réduit=-14+13-14-2-0=-17
Coût=123
LB=118-17=101



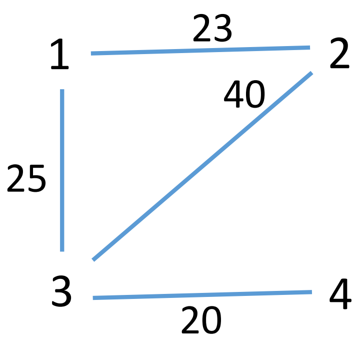
Déroulement d'un exemple – itération 2



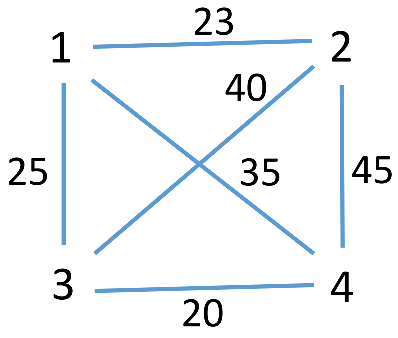
Valeur objectif: 118.0
var duale convexity 0.0
var duales des contraintes degré
degre_2 31+1/3
degre_3 11+1/3
degre_4 16+1/3

Programme maître
Min 118 x_a + 133 x[1] + 123 x[2]
Subject to
contr_degre[2] : 2 x_a + 3 x[1] + 2 x[2] == 2
contr_degre[3] : 2 x_a + 2 x[1] + x[2] == 2
contr_degre[4] : 2 x_a + x[1] + 3 x[2] == 2
contr_convexity : x_a + x[1] + x[2] == 1
x[1] >= 0
x[2] >= 0
x_a >= 0

Coût réduit=-5
Coût=108
LB=118-5=113



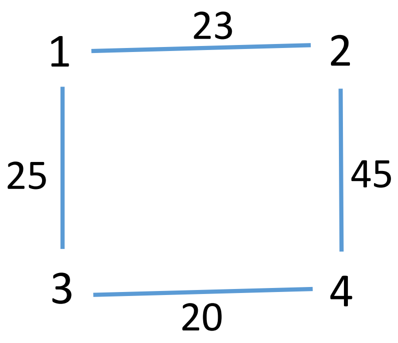
Déroulement d’un exemple – itération 3



Valeur objectif: 115.5
var duale convexity 0.0
var duales des contraintes degré
  degre_2 33.41+2/300
  degre_3 8.41+2/300
  degre_4 15.91+2/300

Programme maître
Min 118 x_a + 133 x[1] + 123 x[2] + 108 x[3]
Subject to
 contr_degre[2] : 2 x_a + 3 x[1] + 2 x[2] + 2 x[3] == 2
 contr_degre[3] : 2 x_a + 2 x[1] + x[2] + 3 x[3]   == 2
 contr_degre[4] : 2 x_a + x[1] + 3 x[2] + x[3]   == 2
 contr_convexity : x_a + x[1] +   x[2] + x[3]   == 1
 x[1] >= 0
 x[2] >= 0
 x[3] >= 0
 x_a >= 0

Coût réduit=-2,5
Coût=113
LB=115,5-2,5=113



Tour qui atteint LB $\Rightarrow$ solution optimale trouvée

Conclusion

- TSP problème NP-difficile
- Modélisation par un PL 0-1 avec un nombre exponentiel de variables
- Chaque variable représente un 1-arbre
- Relaxation continue se résout facilement car sous-problème polynomial
- Relaxation continue fournit borne inférieure de bonne qualité
- Relaxation continue peut donner une solution 0-1 optimale

UNIVERSITE VIRTUELLE DU SENEGAL
foo nekk foofu la

ensiie
PARIS - ÉVRY