**TD – Optimisation sous contraintes - Conditions Karush-Kuhn-Tucker**

Exercice 1

Soit le problème (P) :

$$\min_x f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0 \\ g_3(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On note S l'ensemble des solutions réalisables de (P). Soit $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.

1° x* est-il qualifié ? Donner $F(x^*)$ le cône polyédrique qui est égal à $T(S, x^*)$ le cône tangent à S au point x*

2° x* vérifie-t-il les conditions de KKT ?

3° x* est-il solution de (P) i.e. optimum global ? On pensera aux conditions suffisantes à l'ordre 1.

4° Représenter le problème graphiquement et vérifier les résultats.

Correction de l'exercice1.

1° Les indices des contraintes saturées sont $I(x^*) = \{1,2\}$

La qualification de l'indépendance linéaire : $\nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les deux gradients sont linéairement indépendants donc la qualification de l'indépendance linéaire est vérifié par le point considéré.

Donc on a l'égalité $T(S, x^*) = F(x^*) = \{y : \nabla g_1(x^*) \bullet y \leq 0, \nabla g_2(x^*) \bullet y \leq 0\} = \{y : 4y_1 \leq 0, y_1 + 2y_2 \leq 0\}$

2° Les conditions de KKT au point considéré sont :

$$\nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) = 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2(2-3) \\ 2(0-2) \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

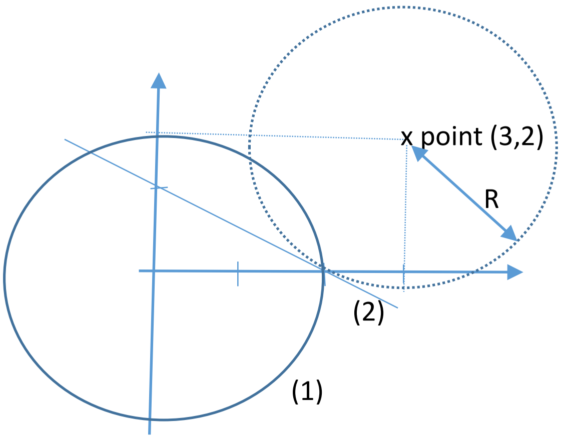
D'où $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ qui sont bien positifs ou nuls.

3° Vérifions les conditions de convexité dont on a besoin pour appliquer le théorème du cours :

- $f$ est-elle convexe ? $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ le hessien de $f$ est défini- positif donc a fortiori semi-défini positif et donc $f$ est convexe.
- de même pour les deux fonctions définissant les deux contraintes saturées $g_1$ et $g_2$ . Elles sont bien convexes (même affine pour $g_2$).

Donc d'après le théorème de cours sur les conditions suffisantes à l'ordre 1, le point considéré x* est minimum global c'est-à-dire solution de (P). Et $f(x^*)$=5.

4°




La contrainte (1) est représentée par le disque de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 2.

La contrainte (2) délimite le demi-espace sous la droite d'équation $x_1 + 2x_2 - 2 = 0$

La contrainte (3) désigne les points à droite de l'axe $x_1 = 0$.

Les courbes de niveau *f*(*x*)=constante sont des cercles de centre $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le plus petit cercle qui rencontre l'ensemble des solutions réalisables est de rayon R= $\sqrt{5}$. Il rencontre l'ensemble des solutions réalisables en le point $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(x^*) = 5$.

<u>Exercice 2</u>

Soit le problème (P) :

$$\min_{x,y} f(x, y) = x + y$$

Sous la contrainte

$$\begin{cases} g(x, y) = xy - 1 \leq 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On note S l'ensemble des solutions réalisables de (P).

1° Montrer que tous les points de S sont qualifiés.

2° Trouver les points de S qui satisfont les conditions de KKT.

3° Montrer que le point trouvé à la question précédente ne satisfait pas les conditions nécessaires du second ordre.

4° Vérifier graphiquement que le problème (P) n'a pas de solution optimale.

<u>Correction de l'exercice 2</u>

1° Il y a une seule contrainte. Donc le plus simple est sans doute d'utiliser le critère de l'indépendance linéaire.

Calculons le gradient de $g$.

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Ce vecteur étant seul, il est linéairement indépendant si et seulement si, il est non nul.

Il s'annule uniquement au point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ailleurs, il est non nul donc linéairement indépendant et donc tout point de S, sauf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, est qualifié.

Pour le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on note qu'il est à l'intérieur de S puisque 0 - 1<0. Et donc, par théorème, le cône tangent à un point intérieur est $\mathbb{R}^n$ avec ici n=2. Donc il est qualifié.

Par conséquent, on va pouvoir appliquer les conditions de KKT car elles sont dans ce cas (qualification) bien nécessaires.

2° Le gradient de la fonction objectif est : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les conditions de KKT sont :

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 & (1) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (2) \\ \lambda(xy - 1) = 0 & (3) \end{cases}$$

Cas 1° : $\lambda = 0$. (2) donne : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui est impossible.

Cas 2° : $\lambda > 0$. (3) entraîne $xy - 1 = 0$.

(2) entraîne $x = y$, puis par (3) on a $x^2 = 1$. Ce qui donne comme solutions potentielles : $x = \pm 1$. +1 n'est pas possible car cela entraînerait, par (2), que $\lambda < 0$. Par contre -1 est possible et même correct puisque cela implique que $\lambda = 1 > 0$.

Donc $P^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ satisfait les conditions KKT. Il est donc potentiellement un minimum local.

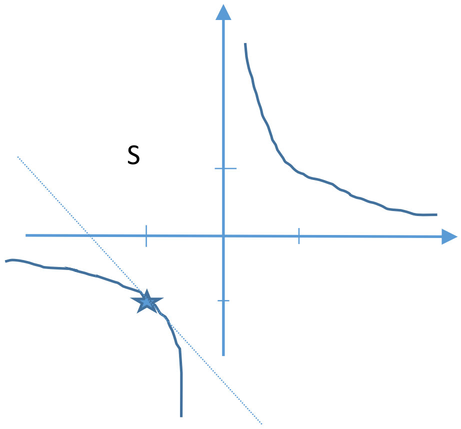
3° Conditions nécessaires du second ordre.

Notons par 1 l'indice de notre unique contrainte. On a : $I^+(P^*) = \{1\}$ car le multiplicateur $\lambda$ associé à la contrainte est strictement positif.

Donc $S^+(P^*) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : xy - 1 = 0\right\}$. Le hessien de la fonction de Lagrange $HL(P^*, \lambda = 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $T(S^+(P^*), P^*) = F^+(P^*) = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : -y_1 - y_2 = 0\right\}$ le cône tangent à $S^+(P^*)$ est bien égal au cône polyédrique $F^+(P^*)$ car $P^*$ vérifie la qualification de l'indépendance linéaire.

Etudions, sur $T(S^+(P^*), P^*)$ , le signe de la forme quadratique associée au hessien de la fonction de Lagrange : $(y_1 \quad -y_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = -2y_1$. Cette forme quadratique ne prend pas toujours des valeurs positives ou nulles. Donc la condition nécessaire du second ordre n'est pas vérifiée. Et donc $P^*$ n'est pas un minimum un local.

4°




f(x,y)=x+y=-2

P* est représenté par l'étoile.

On peut toujours « pousser » la droite d'équation x+y=-2 dans la direction opposée au gradient c'est-à-dire $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et il y a toujours des points de S dessus. Donc l'optimum est non borné et vaut moins l'infini.

<u>Exercice 3</u>

Soit le problème (P) suivant :

$$\min_x f(x_1, x_2) = -x_1$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^3 - x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On note S l'ensemble des solutions réalisables de (P). Soit $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.

1° Montrer que x* est qualifié. En déduire le cône polyédrique décrivant $T(S, x^*)$ le cône tangent à S au point x*.

2° Montrer que x* satisfait les conditions de KKT.

3° Vérifier graphiquement que x* est la solution de (P) (i.e. optimum global).

4° Retrouver ce résultat à l'aide de la dualité lagrangienne.

Correction.

2° $I(x^*) = \{1,2\}$ les contraintes numéro 1 et 2 sont saturées par x*.

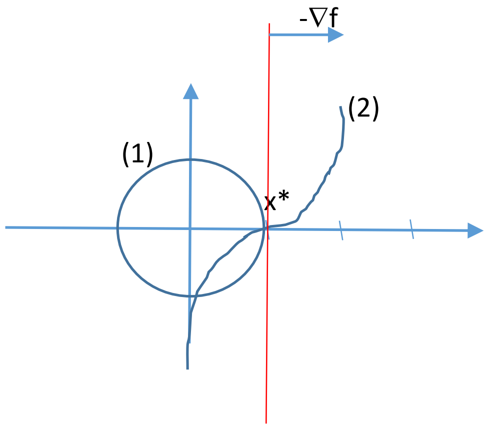
Les conditions de KKT au point x* sont :

$\binom{-1}{0} + \lambda_1 \binom{2}{0} + \lambda_2 \binom{0}{-1} = \binom{0}{0}$ avec $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$

On trouve $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_2 = 0$. Et donc x* satisfait les conditions KKT.

3°

On veut minimiser f(x)=–$x_1$. Donc on va déplacer les courbes de niveau f(x)=C (C constante) dans la direction opposée au gradient de f c'est-à-dire $-\nabla f(x) = \binom{1}{0}$. Quand on déplace la courbe de niveau dans cette direction, le dernier point qui satisfait les contraintes et qui est sur la courbe de niveau (droite verticale rouge) est bien le point x*.




Exercice 4. Conditions suffisantes d'optimalité et convexité

Soit le problème (P) :

$$\min_x f(x)$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in I = \{1, \ldots, m\} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Avec $f, g_i \ i = 1, \ldots, m$ de classe $C^1$.

Soit $x^*$satisfaisant les contraintes de (P) et les conditions de KKT.

Montrer que si :

1° $g_i$ est convexe pour tout $i \in I(x^*) = \{i \in I: g_i(x^*) = 0\}$

2° $f$ est convexe

Alors $x^*$ est solution de (P) (i.e. optimum global).