TD n° 4 : Cône tangent.

Optimisation mathématique

Exercice 1 — ***Qualification de Arrow, Hurwicz et Uzawa***

On considère le problème (P) de minimiser $f(x)$ sous contrainte que $g_i(x) \leqslant 0$, pour tout $i \in [\![1;m]\!]$. On note $S = \{x : g_i(x) \leqslant 0, \forall i \in [\![1;m]\!]\}$. L'ensemble des solutions réalisables.
Soit $x^* \in S$, on définit
— $I(x^*) = \{i : g_i(x) = 0\}$ (les contraintes saturés en x^*)
— $J(x^*) = \{i \in I(x^*) : g_i$ concave $\}$ (les contraintes concaves saturées en x^*).
On suppose que
— pour tout $i \notin I(x^*)$, alors g_i est continue en x^*
— pour tout autre i, g_i est C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Enfin, soit $F_0(x^*) = \left\{ y : \begin{array}{ll} \nabla g_i(x^*) \bullet y \leqslant 0, & \forall i \in J(x^*) \\ \nabla g_i(x^*) \bullet y < 0, & \forall i \in I(x^*) \backslash J(x^*) \end{array} \right\}$, on suppose que cet ensemble est non vide.
On va montrer que x^* est qualifié (c'est-à-dire qu'on vérifie l'égalité $T(S, x^*) = F(x^*)$ où $F(x^*) = \{y : \nabla g_i(x^*) \bullet y \leqslant 0, \forall i \in I(x^*)\})$.
Rappel : $T(S, x^*)$ est fermé, et $T(S, x^*) \subset F(x^*)$

1. (a) Soit $y \in F_0(x^*)$, $x_k = x^* + \frac{1}{k} y$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que x_k est réalisable à partir d'un certain rang k_0.
   (b) En déduire que $F_0(x^*) \subset T(S, x^*)$.
2. (a) Montrer que $F(x^*) \subset \overline{F_0(x^*)}$ (l'adhérence de $F_0(x^*)$).
   (b) En déduire que $F(x^*) = T(S, x^*)$.
3. On considère l'exemple suivant dans $\mathbb{R}^2$: $f(x) = x_1 - x_2$, $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1$ et $g_2(x) = x_1 - 1$. On pose $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que x^* ne vérifie par la qualification de Cottle.
   (b) Montrer que x^* est qualifié et expliciter son cône tangent.
   (c) En déduire que x^* n'est pas solution optimale du problème.

Exercice 2 — ***Cône tangent et convexité***

On considère une fonction f, de classe C^1 et convexe définie sur un ensemble S convexe de $\mathbb{R}^n$. On cherche à minimiser f sur S. Soit $x^* \in S$.
Définitions :
— cone(A) est le plus petit cône contenant A, c'est-à-dire $\{\alpha \cdot x : \alpha > 0, x \in A\}$
— $S - \{x^*\} = \{x - x^* : x \in S\}$ est l'ensemble S translaté par le vecteur x^*.

1. Montrer que si $\nabla f(x^*) \bullet y \geqslant 0$ pour tout $y \in S - \{x^*\}$ alors x^* est un minimum global de f.
2. Montrer que $S - \{x^*\} \subset T(S, x^*)$. En déduire que $\overline{\text{cone}(S - \{x^*\})} \subset T(S, x^*)$.
3. Montrer que $T(S, x^*) \subset \overline{\text{cone}(S - \{x^*\})}$.
4. Soit le problème $\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ tels que $x_1 + x_2 \geqslant 1$. Montrer que l'optimum global est en $x^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Représenter graphiquement $T(S, x^*)$ dans un repère orthonormé.

Correction

1) a) $i \notin I(x^*)$ $\begin{cases} x_k \to x^* \text{ et } g_i \text{ continue en } x^* \text{ entraînent que } g_i(x_k) \to g_i(x^*) < 0 \\ \text{donc pour } k \text{ suffisamment grand } g_i(x_k) \leq 0 \end{cases}$

$i \in J(x^*)$ $\begin{cases} g_i \text{ concave} \Rightarrow g_i(x_k) - \underbrace{g_i(x^*)}_{0} \leq \nabla g_i(x^*) \cdot (x_k - x^*) \\ \text{on multiplie par } k \Rightarrow k\, g_i(x_k) \leq \nabla g_i(x^*) \cdot y \leq 0 \Rightarrow g_i(x_k) \leq 0 \end{cases}$

$i \in I(x^*) \setminus J(x^*)$ $\begin{cases} \text{Taylor} \Rightarrow g_i(x_k) - \underbrace{g_i(x^*)}_{0} = \nabla g_i(x^*) \cdot (x_k - x^*) + \|x_k - x^*\| \varepsilon(x_k - x^*) \\ \text{on multiplie par } k \Rightarrow k\, g_i(x_k) = \underbrace{\nabla g_i(x^*) \cdot y}_{<0} + \|y\| \varepsilon(x_k - x^*) \\ \text{pour } k \text{ suffisamment grand } \varepsilon(x_k - x^*) \text{ est petit} \Rightarrow k\, g_i(x_k) \leq 0 \Rightarrow g_i(x_k) \leq 0 \end{cases}$

b) x_k est réalisable. On pose $d_k = k$. Alors $x_k \to x^*$ et $d_k(x_k - x^*) \to y$
donc $y \in T(S, x^*)$

2) a) Montrons que tout voisinage de $y \in F(x^*)$ rencontre $F_0(x^*)$
Soit $y_0 \in F_0(x^*) \neq \emptyset$ $\quad y_0 \neq 0 \quad$ si $I(x^*) \neq J(x^*)$
$\forall \varepsilon > 0$ $\left(y + \frac{\varepsilon}{2\|y_0\|} y_0\right) \in B(y, \varepsilon)$

<u>autre dém.</u> $y \in F(x^*)$. M.q. $\exists$ une suite de points de $F_0(x)$ qui CV vers y.
$y_p = y + \frac{y_0}{p}$ $\quad y_p \to y$
et $y_p \in F_0(x)$
$\Rightarrow y \in \overline{F_0}(x)$

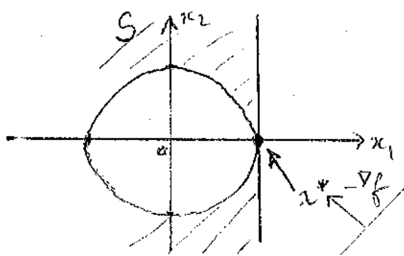
$$\nabla g_i(x^*) \cdot \left(y + \frac{\varepsilon}{2\|y_0\|} y_0\right) = \underbrace{\nabla g_i(x^*) \cdot y}_{\leq 0} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2\|y_0\|} \nabla g_i(x^*) \cdot y_0}_{\substack{<0 \text{ si } i \in I(x^*) \setminus J(x^*) \\ \leq 0 \text{ si } i \in J(x^*)}}$$

b) $\overline{F_0}(x^*) \underset{\substack{\uparrow \\ 1) \text{ et } T \text{ fermé}}}{\subseteq} T(S, x^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cours}}}{\subseteq} F(x^*) \underset{\substack{\uparrow \\ a)}}{\subseteq} \overline{F_0}(x^*)$

remarque si $I(x^*) = J(x^*)$ alors on a $F_0(x) = F(x^*)$ et donc le résultat est démontré.

3) a) $I(x^*) = \{1, 2\}$ $\nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F_0(x^*)$ de Cottle $= \{y : \nabla g_i(x^*) \cdot y < 0 \quad i \in I(x^*)\}$
$= \{y : -2y_1 < 0,\ y_1 \cancel{<} 0\} = \emptyset$

b) $J(x^*) = \{1, 2\}$ car g_1, g_2 concaves $\quad F_0(x^*) = \{y : \nabla g_i(x^*) \cdot y \leq 0 \ i \in I(x^*)\}$
$= \{y : -2y_1 \leq 0,\ y_1 \leq 0\} = \{y : y_1 = 0\} \neq \emptyset$



donc $T(S, x^*) = \{y : y_1 = 0\}$

c) x^* est qualifié donc Kuhn-Tucker sont nécessaires
$\exists d_1, d_2 \geq 0$ $\quad \nabla f(x^*) + d_1 \nabla g_1(x^*) + d_2 \nabla g_2(x^*) = 0$
$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ impossible donc x^* pas min local et pas min global.

Cône tangent et convexité

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexe , f de classe C^1 et convexe , $x^* \in S$.

On considère le pb. minimiser $f(x)$ s.c. $x \in S$

a) M.q. $\nabla f(x^*) \cdot y \geq 0$ pour tout $y \in S - \{x^*\}$ $\Rightarrow$ x^* est un minimum global du pb.

Soit $x \in S$. Alors $x - x^* \in S - \{x^*\}$ ce qui entraine $\nabla f(x^*) \cdot (x - x^*) \geq 0$

f convexe et C^1 $\Rightarrow$ $f(x) \geq f(x^*) + \underbrace{\nabla f(x^*) \cdot (x - x^*)}_{\geq 0} \geq f(x^*)$

b) M.q. $S - \{x^*\} \subseteq T(S, x^*)$

Soit $x \in S$

Posons $x_k = x^* + \frac{1}{k}(x - x^*)$. Alors $x_k \xrightarrow{k} x^*$ et $x_k = \underbrace{(1 - \frac{1}{k})}_{\geq 0} x^* + \frac{1}{k} x \in S$ pour $k \geq 1$

combinaison convexe de x^* et x

Posons $\lambda_k = k$. Alors $\lambda_k (x_k - x^*) \xrightarrow{k} x - x^*$

Donc $y = x - x^* \in T(S, x^*)$

c) soit le pb : min $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ s.c. $x_1 + x_2 \geq 1$

M.q. $x^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ est optimum global.

$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Les $y \in S - \{x^*\}$ vérifient $y_1 + y_2 \geq 0$

car $x_1 + x_2 \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{x_1 - \frac{1}{2}}_{y_1} + \underbrace{x_2 - \frac{1}{2}}_{y_2} \geq 0$

f est convexe

donc $\nabla f(x^*) \cdot y = y_1 + y_2 \geq 0$ pour tout $y \in S - \{x^*\}$

Cône tangent

D cône : $\forall x \in D \Rightarrow \alpha x \in D \ \forall \alpha > 0$

Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$, on note Cône(C) le plus petit cône contenant C

On a Cône$(C) = \{ \alpha x : \forall \alpha > 0, \forall x \in C \}$ $\longrightarrow$ En effet, soit D cône contenant C, D est cône donc $\alpha x \in D$ $\forall \alpha > 0$, $x \in C$

i.e. D contient Cône(C)

De plus Cône(C) est un cône.

A) 1) Soit $x \in C$. M.q. $T(C, x) \subseteq \overline{\text{Cône}(C - \{x\})}$

Soit $y \in T(C, x)$. $\exists \alpha_k > 0$, $\exists x_k \in C$ t.q. $\alpha_k (x_k - x) \to y$

Or $\alpha_k (x_k - x) \in$ Cône$(C - \{x\})$ $\Rightarrow y \in \overline{\text{Cône}(C - \{x\})}$

2) Soit $C = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \underline{g_1(x)} = x_2 - x_1^3 \leq 0, \ g_2(x) = -x_2 \leq 0 \}$

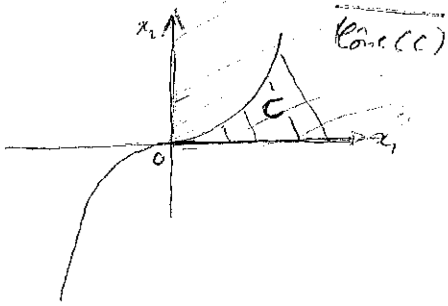
a) m.q. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \overline{\text{Cône}(C)}$

b) m.q. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin T(C, 0)$

a) $u_k = \frac{1}{k^3} \underbrace{\begin{pmatrix} k \\ k^3 \end{pmatrix}}_{\in C} \in$ Cône(C) $\qquad u_k \xrightarrow{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \overline{\text{Cône}(C)}$

b) on a $T(C, 0) \subseteq F(0) = \{ y : \nabla g_1(0) \cdot y \leq 0, \nabla g_2(0) \cdot y \leq 0 \} = \{ y : y_2 = 0 \}$

donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F(0)$



B) On considère maintenant C convexe. $x \in C$

1) m.q. Cône(C) est convexe.

$y = (1-\lambda) \underset{>0}{\alpha_1} x_1 + \lambda \underset{>0}{\alpha_2} x_2$, $x_1, x_2 \in C$

$$y = \underbrace{[(1-\lambda)\alpha_1 + \lambda \alpha_2]}_{>0} \underbrace{\left[\frac{(1-\lambda)\alpha_1 x_1}{(1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2} + \frac{\lambda \alpha_2 x_2}{(1-\lambda)\alpha_1 + \lambda \alpha_2} \right]}_{\in C} \in \text{Cône}(C)$$

2) m.q. $\overline{\text{Cône}(C - \{x\})} \subseteq T(C, x)$

a) on m.q. $C - \{x\} \subseteq T(C, x)$

$\forall y \in C$ $x_k = x + \frac{1}{k}(y - x) \in C$ pour $k \geq 1$ (en effet $0 \leq \frac{1}{k} \leq 1$) et $x + \frac{1}{k}(y - x) \xrightarrow{k} x$

prenons $\alpha_k = k$ $\quad k(x_k - x) = y - x \quad (\alpha_k(x_k - x) \to y - x)$

b) $\underline{\text{Cône}(C - \{x\})} \subseteq T(C, x)$ (car $T(C, x)$ cône)

$\overline{\text{Cône}(C - \{x\})} \subseteq T(C, x)$ (car $T(C, x)$ fermé)