TD Décomposition Dantzig-Wolfe

Affectation généralisée : décomposition selon les clusters.

Soient n items et K clusters. Chaque item doit être affecté à un unique cluster. Chaque item j a un poids p_{jk} qui dépend du cluster k. Un cluster k a une capacité q_k qui limite le poids total des items qu'il peut héberger. c_{jk} est le coût d'affectation de l'item j au cluster k.

Sachant que l'on veut minimiser le coût total d'affectation, on modélise ce problème par le programme linéaire 0-1 suivant :

(P) $\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} c_{jk} x_{jk}$

sous les contraintes $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_{jk} x_{jk} \leq q_k & k = 1, \dots, K \quad (Capa) \\ \sum_{k=1}^{K} x_{jk} = 1 & j = 1, \dots, n \quad (A) \\ x_{jk} \in \{0,1\} & j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K \end{cases}$

(Capa) sont les contraintes de capacité pour chaque cluster k=1 à K.

Les contraintes (A) sont les contraintes d'affectation des items j=1 à n aux clusters.

On partitionne les variables en K clusters : un cluster k est relatif aux variables x_{jk} des items j=1,…,n.

Les contraintes couplantes sont les contraintes (A) d'affectation j de 1 à n.

Dans la suite, on considère l'instance suivante :

nombre d'items n=4, nombre de clusters K=2.

p_{jk} le poids de l'item j dans le cluster k. Les poids sont définis par :

poids	k=1	k=2
j=1	1	4
j=2	2	3
j=3	3	2
j=4	4	1

q_k capacité du cluster k. Les capacités sont définies par :

capacités	k=1	k=2
	5	5

c_{jk} le coût de l'item j dans le cluster k. Les coûts sont définis par :

coûts	k=1	k=2
j=1	2	5
j=2	2	5
j=3	4	3
j=4	5	1

On considère les 4 affectations suivantes :

-affectation i=1 : l'item 4 est affecté aux clusters 1 et 2, les autres items ne sont pas affectés.

-affectation i=2 : l'item 3 est affecté aux clusters 1 et 2, les autres items ne sont pas affectés.

-affectation i=3 : l'item 2 est affecté aux clusters 1 et 2, les autres items ne sont pas affectés.

-affectation i=4 : l'item 1 est affecté aux clusters 1 et 2, les autres items ne sont pas affectés.

1-On associe à chacune de ces affectations une variable $\lambda_i \geq 0$. Le problème maître a 5 contraintes. La contrainte j stipule que l'item j est affecté à un unique cluster (j=1 à 4). La dernière contrainte est la contrainte de convexité. Ecrire le problème maître correspondant à ces 4 affectations. Ce problème admet-il une solution ?

2-On rajoute une colonne fictive de variable λ_0 avec des coefficients 1 sur chaque ligne des contraintes d'affectation (A) et la contrainte de convexité, variable nécessaire pour que le problème maitre admette une solution. λ_0 est de coût 20 suffisamment élevée pour que la variable soit éliminée de toute solution optimale. On résout le problème maître et on obtient comme variables duales μ=(6,75 6,75 6,75 6,25) et $\eta=-6{,}5$ pour la contrainte de convexité.

Résoudre le sous-problème : variables $x_{jk}=1$ si item j est affecté au cluster k, 0 sinon et respecter contraintes de capacité. Donner la nouvelle colonne entrante.

3-Donner une borne inférieure de la valeur du problème d'affectation. En déduire que la colonne entrante est la solution du problème de l'affectation généralisée.

4- Donner la formulation du dernier problème maitre pour la décomposition de Dantzig-Wolfe alternative.

Corrigé

Question 1. Le problème (P) a la structure ci-dessous dans le cas de l'exemple :

k=1				k=2				←clusters
x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	←variables
2	2	4	5	5	5	3	1	←objectif
1	0	0	0	1	0	0	0	= 1
0	1	0	0	0	1	0	0	= 1
0	0	1	0	0	0	1	0	= 1
0	0	0	1	0	0	0	1	= 1
1	2	3	4	0	0	0	0	≤ 5
0	0	0	0	4	3	2	1	≤ 5

L'objectif est en vert. Il est séparable : une partie sur le cluster 1, l'autre partie sur le cluster 2.

La structure bloc-diagonale est en jaune. Les contraintes couplantes sont en bleu.

On peut vérifier que les 4 affectations données vérifient bien les contraintes de capacité (Capa). Le problème maître est écrit ci-dessous :

Minimiser	$6\lambda_1$	$+ 7\lambda_2$	$+ 7\lambda_3$	$+ 7\lambda_4$	
(item 1)	$0\lambda_1$	$+ 0\lambda_2$	$+ 0\lambda_3$	$+ 2\lambda_4$	= 1
(item 2)	$0\lambda_1$	$+ 0\lambda_2$	$+ 2\lambda_3$	$+ 0\lambda_4$	= 1
(item 3)	$0\lambda_1$	$+ 2\lambda_2$	$+ 0\lambda_3$	$+ 0\lambda_4$	= 1
(item 4)	$2\lambda_1$	$+ 0\lambda_{2-}$	$+ 0\lambda_3$	$+ 0\lambda_4$	= 1
(convexité)	λ_1	$+ \lambda_2$	$+ \lambda_3$	$+ \lambda_4$	= 1

Ce problème admet-il une solution ? pourquoi ? $\lambda_i = ½$ pour i=1 à 4 et donc la contrainte de convexité ne peut être satisfaite.

Question 2. Le sous-problème k est $\min_{x_{.k}} \sum_{j=1}^{n} c_{jk} x_{jk} - \mu A^k x_{.k}$ s.c. $\sum_{j=1}^{n} p_{jk} x_{jk} \leq q_k, x_{jk} \in \{0,1\}$ $j =$ 1 à n

La matrice A^k est la matrice identité I_n. Pour chaque cluster k, dans la fonction objectif, on a bien fait apparaitre les variables duales, voir ci-dessous :

cluster k=1

minimiser	$(2 - 6{,}75)x_{11}$	$+ (2 - 6{,}75)x_{21}$	$+ (4 - 6{,}75)x_{31}$	$+ (5 - 6{,}25)x_{41}$	
sous contrainte	x_{11}	$+ 2x_{21}$	$+ 3x_{31}$	$+ 4x_{41}$	≤ 5

Avec $x_{j1} \in \{0,1\}$

La solution est dans le tableau suivant.

	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	coût
solution	1	1	0	0	-9,5

cluster k=2

minimiser	$(5 - 6{,}75)x_{12}$	$+ (5 - 6{,}75)x_{22}$	$+ (3 - 6{,}75)x_{32}$	$+ (1 - 6{,}25)x_{42}$	
sous contrainte	$4x_{12}$	$+ 3x_{22}$	$+ 2x_{32}$	$+ x_{42}$	≤ 5

Avec $x_{j2} \in \{0,1\}$

La solution est dans le tableau suivant.

	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	coût
solution	0	0	1	1	-9

Le coût réduit de la colonne trouvée : cred = -9,5 -9 -η = -9,5 -9 + 6,5 = -12

Question3.

Borne inférieure = cred+ μa + η = -12 + 26,5 -6,5 = 8

Pourquoi la colonne est solution ? La solution trouvée satisfait la contrainte d'affectation (chaque item est affecté à un et un seul cluster) et son coût est 8. Donc on ne peut pas faire mieux car la borne inférieure est atteinte.

Question 4.

Dans la décomposition Dantzig-Wolfe alternative, il y a :

- 2 contraintes de convexité une par cluster,
- 2 variables λ^k une par cluster.

Minimiser	$5\lambda_1^1$	$+\lambda_1^2$	$+ 4\lambda_2^1$	$+3\lambda_2^2$	$+2\lambda_3^1$	$+5\lambda_3^2$	$+2\lambda_4^1$	$+5\lambda_4^2$	$+4\lambda_5^1$	$+4\lambda_5^2$	
(item 1)							$+\lambda_4^1$	$+\lambda_4^2$	$+\lambda_5^1$		= 1
(item 2)					$+\lambda_3^1$	$+\lambda_3^2$			$+\lambda_5^1$		= 1
(item 3)			$+\lambda_2^1$	$+\lambda_2^2$						$+\lambda_5^2$	= 1
(item 4)	λ_1^1	$+\lambda_1^2$	-							$+\lambda_5^2$	= 1
(convexité1)	λ_1^1		$+\lambda_2^1$		$+\lambda_3^1$		$+\lambda_4^1$		$+\lambda_5^1$		= 1
(convexité2)		λ_1^2		$+\lambda_2^2$		$+\lambda_3^2$		$+\lambda_4^2$		$+\lambda_5^2$	= 1

Enveloppe convexe de produits cartésiens et produits cartésiens d'enveloppes convexes

Soient $X^1 \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$ et $X^2 \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$.

1° Montrer que $Conv(X^1 \times X^2) \subseteq Conv(X^1) \times Conv(X^2)$.

2° Montrer que $Conv(X^1) \times Conv(X^2) \subseteq Conv(X^1 \times X^2)$.

3° Soient $c = (c^1 \quad c^2)$ vecteur ligne avec $c^1 \in \mathbb{R}^{m_1}, c^2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ et $A = (A^1 \quad A^2)$ matrice de l lignes avec A^1 ayant m_1 colonnes , A^2 ayant m_2 colonnes et b vecteur colonne de l lignes.

On considère le problème (P) : $\min_z \{cz \ : \ Az \geq b, z \in Conv(X)\}$ où $X = X^1 \times X^2$.

On décompose z en deux composantes x et y : $z = \binom{x}{y}$.

Et on considère le problème (P_D) : $\min_{x,y} \{c^1x + c^2y \ : \ A^1x + A^2y \geq b, x \in Conv(X^1), y \in Conv(X^2)\}$

Déduire de 1° et 2° que ces deux problèmes (P) et (P_D) fournissent la même valeur.

Correction

1° De façon évidente : $X^1 \times X^2 \subseteq Conv(X^1) \times Conv(X^2)$. De plus, $Conv(X^1) \times Conv(X^2)$ est un convexe de $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$. $Conv(X^1 \times X^2)$ étant par définition le plus petit convexe contenant $X^1 \times X^2$, on aboutit à $Conv(X^1 \times X^2) \subseteq Conv(X^1) \times Conv(X^2)$.

2° Soient $x \in Conv(X^1)$ et $y \in Conv(X^2)$. Alors x et y s'écrivent comme combinaison convexe d'un nombre fini de points de X^1 et X^2 respectivement : $x = \sum_i \lambda_i x^i$ et $y = \sum_j \mu_j y^j$ avec $x^i \in X^1$ et $y^j \in X^2$, et $\sum_i \lambda_i = 1$ et $\sum_j \mu_j = 1$, et $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$ et $\mu_j \geq 0 \ \forall j$.

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \sum_i \lambda_i x^i \\ y \end{pmatrix} = \sum_i \lambda_i \binom{x^i}{y}$$

Car $\sum_i \lambda_i \, y = y$.

De même $\binom{x^i}{y} = \sum_j \mu_j \binom{x^i}{y^j}$.

Finalement :

$$\binom{x}{y} = \sum_i \lambda_i \left(\sum_j \mu_j \binom{x^i}{y^j} \right) = \sum_i \lambda_i \sum_j \mu_j \binom{x^i}{y^j}$$

$\lambda_i \mu_j \geq 0 \ \forall i, j$ et $\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \sum_i \lambda_i \sum_j \mu_j = 1$. Donc $\binom{x}{y}$ est une combinaison convexe de points de $X^1 \times X^2$. Ce qui montre que $Conv(X^1) \times Conv(X^2) \subseteq Conv(X^1 \times X^2)$.

3° Le résultat des questions 1° et 2° entraine que $Conv(X^1) \times Conv(X^2) = Conv(X^1 \times X^2)$. L'ensemble des solutions réalisables de (P) et (P_D) sont donc identiques. Comme les objectifs de (P) et (P_D) sont par construction les mêmes, les deux problèmes rendent la même valeur.

Problème de découpe industrielle : comparaison du modèle Gilmore-Gomory et du modèle de Kantorovitch.

Dans une première partie, on présente le modèle de Gilmore-Gomory (G-G). C'est un modèle avec un nombre exponentiel de variables entières : les patterns. Pour obtenir une borne inférieure, on se concentre sur la relaxation continue du modèle. Le nombre de variables étant exponentiel, la résolution du modèle relâché nécessite en pratique un algorithme de génération de colonnes.

Dans la deuxième partie, on présente le modèle de Kantorovith. C'est un modèle plus « compact» avec un nombre de variables entières polynomial. Sa structure se prête à la décomposition de Dantzig-Wolfe. On montre que la décomposition de Dantzig-Wolfe du modèle de Kantorovitch est équivalente au modèle de G-G relâché continu.

Cet exercice puise ses sources dans la référence ci-dessous :

LP models for bin packing and cutting stock problems . J.M. Valerio de Carvalho

European Journal of Operational Research 141 (2002) 253–273

1. Problème de découpe (cutting stock problem) : modèle de Gilmore-Gomory.

On a des roll de longueur L .

On a des demandes de bandes de longueur <L. Il y a m=3 types de demandes. Le type i demande n_i bandes de longueur l_i .

Type de demande i	1	2	3
Longueur d'une bande l_i	2	3	4
Nombre de bandes n_i	6	4	2

On découpe les bandes dans les rolls qui sont chacun de longueur L=10.

Q1° Enumérer quelques façons de découper les bandes dans un roll (de longueur L=10)

Une façon de faire un découpage dans un roll est appelée *pattern*. On note *n* le nombre de patterns possibles.

On note a_{ij} le nombre de bandes de type i (de longueur l_i) découpées dans le pattern j.

Q2° Donner les a_{ij} pour les patterns j exhibés dans la question Q1.

Q3° Donner la contrainte de type sac-à-dos que doit vérifier un pattern j quelconque.

On veut minimiser le nombre de rolls utilisés tout en satisfaisant la demande.

Q4° Ecrire le programme mathématique correspondant : variables entières x_j (j=1 à n) et m contraintes avec une par demande.

On relaxe les conditions d'intégrité sur les variables x_j j=1 à n. On obtient le programme appelé (PL).

On note μ_i (i=1 à m) la variable duale associée à la contrainte *i* du problème relaxé (PL).

Q5° Donner le coût réduit d'une variable x_j en fonction de a_{ij} et μ_i . En déduire que chercher une variable de coût réduit minimum revient à résoudre un problème de sac-à-dos en variables entières.

On va maintenant traiter le problème de l'exemple.

Exemple : on a mis dans le programme maître initial 3 variables x_1, x_2, x_3 correspondant aux patterns : 5 bandes de type 1, 3 bandes de type 2, 2 bandes de type 3.

Q6° Ecrire le programme maître (PL_R) correspondant.

On résout le programme maître (PL_R) et on trouve x_1=6/5, x_2=4/3 et x_3=1 avec l'objectif z=3+8/15.

Vérifier que les variables duales sont μ_1=1/5, μ_2=1/3, μ_3=1/2.

Chercher une variable de coût réduit minimum. A quel pattern correspond cette variable. Si le coût réduit est <0 introduire la nouvelle variable dans le programme maître (PL_R). Est-il nécessaire de résoudre le nouveau programme maître ?

Q7° Le nouveau problème maitre est :

$$\min_x z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_4 \geq 6 & (1) \\ 3x_2 \geq 4 & (2) \\ 2x_3 + 2x_4 \geq 2 & (3) \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

La solution est : $x_1 = 1, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = 0, x_4 = 1; z = 3 + \frac{1}{3}$

Déterminer les variables duales μ_1, μ_2, μ_3 par les écarts complémentaires

Chercher une variable de coût réduit minimum.

Q8° Le nouveau problème maitre est :

$$\min_x z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_4 + 2x_5 \geq 6 & (1) \\ 3x_2 + 2x_5 \geq 4 & (2) \\ 2x_3 + 2x_4 \geq 2 & (3) \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

La solution est : $x_1 = 0{,}2;\ x_2 = 0;\ \ x_3 = 0;\ x_4 = 1;\ \ x_5 = 2$; $z = 3 + \frac{1}{5}$

Déterminer les variables duales μ_1, μ_2, μ_3 par les écarts complémentaires

Chercher une variable de coût réduit minimum. Faut-il continuer ?

Q9° La somme des variables de la solution optimale vaut $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 + \frac{1}{5} = \kappa$

A l'aide de cette valeur κ , reconstituer a posteriori les bornes inf. de (PL) à chaque itération.

Q10° La dernière solution est fractionnaire. Proposer, à partir de cette solution fractionnaire, une solution entière.

Correction : modèle Gilmore-Gomory

Q1° et Q2°. Quelques patterns possibles dans le tableau ci-dessous :

n° de pattern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
pattern	5 bandes de type 1	3 bandes de type 2	2 bandes de type 3	3 type 1 1 type 3	2 type 1 2 type 2	2 type 2 1 type 3	3 type 1 1 type 3	1 type 2 2 type 3	1 type 1 1 type 2 3 type 3
a_{ij} non nuls	a_{11}=5	a_{22}=3	a_{33}=2	a_{14}=3 a_{34}=1	a_{15}=2 a_{25}=2	a_{26}=2 a_{36}=1	a_{17}=3 a_{37}=1	a_{18}=1 a_{38}=2	a_{19}=1 a_{29}=1 a_{39}=1

Q3° Un pattern j doit vérifier $\sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} \leq L$

Q4° Minimiser le nombre de rolls utilisés tout en satisfaisant la demande

$\min_{x} z = \sum_{j=1}^{n} x_j$ sous les contraintes $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq n_i \ \ i = 1, \dots, m \\ x_j \text{ entier naturel } \ j = 1, \dots, n \end{cases}$

Q5° On relache maintenant les conditions d'intégrité sur les variables de pattern x_j. Le coût réduit d'une variable x_j est : $c_j - \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_{ij}$

où c_j=1 est le coefficient de la variable dans la fonction économique z.

Chercher une variable de coût réduit min revient à chercher un pattern satisfaisant la contrainte de sac-à-dos tout en minimisant une fonction linéaire dont les coefficients sont les variables duales :

$\min\limits_{y} 1 - \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ sous les contraintes $\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} l_i y_i \leq L \\ y_i \text{ entier naturel } \; i = 1, \dots, m \end{cases}$

Ce qui donne $1 - \max\limits_{y} \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ sous les mêmes contraintes

On a donc un problème de sac à dos en nombre entiers. Une fois le problème résolu, le pattern est fait de y_i bandes de type i (i=1 à m) et donc, si on note j* le pattern, $a_{ij^*}=y_i$.

Q6° Exemple (suite) : dans le programme maître 3 variables x_1, x_2, x_3 correspondant aux patterns : 5 bandes de type 1, 3 bandes de type 2, 2 bandes de type 3. Le programme maître (PL_R) est :

$$\min\limits_{x} z = x_1 + x_2 + x_3 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} 5x_1 \geq 6 \\ 3x_2 \geq 4 \\ 2x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Les variables duales sont $\mu_1=1/5$, $\mu_2=1/3$, $\mu_3=1/2$. On peut par exemple vérifier que les coûts réduits de x_1, x_2, x_3 sont positifs ou nuls. Vérifier aussi l'égalité des objectifs du dual et du primal prennent la même valeur : 6/5+4/3+1.

$$\max \tfrac{1}{5}y_1 + \tfrac{1}{3}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 10 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ entiers naturels} \end{cases}$$

La solution est $y_1=1, y_2=0, y_3=2$. Ce qui fait un coût réduit de $1-(1/5+1)= -1/5 < 0$. Le coût réduit est négatif donc il faut ajouter la variable et résoudre à nouveau (PL_R). Le pattern est fait de 1 bande de type 1, 2 bandes de type 3, c'est le pattern 8 exhibé dans la question Q1° .

Q7° Pour les écarts complémentaires, écrivons les contraintes du dual du PL restreint :

$$\begin{cases} 5\mu_1 \leq 1 & (x_1) \\ 3\mu_2 \leq 1 & (x_2) \\ 2\mu_3 \leq 1 & (x_3) \\ \mu_1 + 2\mu_3 \leq 1 & (x_4) \end{cases}$$

On en déduit les contraintes qui doivent être saturées :

$$\begin{array}{cc} 5\mu_1 = 1 & (x_1 = 1) \\ 3\mu_2 = 1 & (x_2 = \frac{4}{3}) \\ 2\mu_3 \leq 1 & (x_3 = 0) \\ \mu_1 + 2\mu_3 = 1 & (x_4 = 1) \end{array}$$

Ce qui fait : $\mu_1 = \frac{1}{5}$; $\mu_2 = \frac{1}{3}$; $\mu_3 = \frac{2}{5}$

Le sous-problème est : $\max \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{5}y_3$ sous les contraintes $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 10 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ entiers naturels} \end{cases}$

La solution est $y_1=2, y_2=2, y_3=0$. Ce qui fait un coût réduit de $1-(2/5+2/3)= -1/15 < 0$.

Q8° Pour les écarts complémentaires, écrivons les contraintes du dual du PL restreint :

$$\begin{cases} 5\mu_1 \le 1 & (x_1) \\ 3\mu_2 \le 1 & (x_2) \\ 2\mu_3 \le 1 & (x_3) \\ \mu_1 + 2\mu_3 \le 1 & (x_4) \\ 2\mu_1 + 2\mu_2 \le 1 & (x_5) \end{cases}$$

Déduisons les contraintes qui doivent être saturées :

$$\begin{cases} 5\mu_1 = 1 & (x_1 = \frac{1}{5}) \\ 3\mu_2 \le 1 & (x_2 = 0) \\ 2\mu_3 \le 1 & (x_3 = 0) \\ \mu_1 + 2\mu_3 = 1 & (x_4 = 1) \\ 2\mu_1 + 2\mu_2 = 1 & (x_5 = 2) \end{cases}$$

On en tire : $\mu_1 = \frac{1}{5}$; $\mu_2 = \frac{3}{10}$; $\mu_3 = \frac{2}{5}$

Le sous-problème est : $\max \frac{1}{5}y_1 + \frac{3}{10}y_2 + \frac{2}{5}y_3$ sous les contraintes $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \le 10 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ entiers naturels} \end{cases}$

La solution est $y_1=0, y_2=2, y_3=1$. Ce qui fait un coût réduit de 1–(3/5+2/5)= 0.

(PL) est résolu.

Q9° On a donc $3 + \frac{1}{5} = \kappa$. La borne inf. de (PL) est valeur du PL restreint moins $\kappa \times co\hat{u}t\ reduit\ min$

Les bornes inf. et sup. de PL sont :

itération	Borne inf.	Borne sup.
0	$3 + \frac{8}{15} - \left(3 + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{5} = 2{,}8933$	$3 + \frac{8}{15}$
1	$3 + \frac{1}{3} - \left(3 + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{15} = 3{,}12$	$3 + \frac{1}{3}$
2	$3 + \frac{1}{5} - \left(3 + \frac{1}{5}\right) \times 0 = 3{,}2$	$3 + \frac{1}{5}$

Q10° La solution de (PL) est fractionnaire : : $x_1 = 0{,}2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 1;\ x_5 = 2$

On obtient facilement une solution entière en prenant $x_1=1$.

Le pattern décrit par x_1 est 5 bandes de type 1

Le pattern décrit par x_4 est 1 bande de type 1 et 2 bandes de type 3 (solution $y_1=1, y_2=0, y_3=2$)

Le pattern décrit par x_5 est 2 bandes de type 1 et 2 bandes de type 2 (solution $y_1=2, y_2=2, y_3=0$)

D'où la solution approchée :

On utilise 4 rouleaux et on découpe 1 pattern x_1, 1 pattern x_4, 2 patterns x_5

Les clients 2 et 3 seront servis exactement, le client 1 aura un surplus de 4 bandes.

2. Découpe industrielle : modèle de Kantorovitch et comparaison avec le modèle G-G (10pt)

On propose d'étudier le modèle de Kantorovich donné ci-dessous.

$$\min_{z,x} \sum_{k=1}^{K} z_k$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} x_{ik} \geq n_i & i = 1, \dots, m \quad (1) \\ \sum_{i=1}^{m} l_i x_{ik} \leq L z_k & k = 1, \dots, K \quad (2) \\ z_k \in \{0,1\}, x_{ik} \in \mathrm{N} \;\; i = 1, \dots, m \;\; k = 1, \dots, K \end{cases}$$

K est une borne supérieure du nombre de rolls (rouleaux) qui seront utilisées, L longueur d'un roll, m nombre de types de demandes, l_i longueur de la demande de type i=1,…,m, n_i nombre de demandes de type i=1,…,m .

Les variables sont :

z_k = 1 si on utilise le roll k , 0 sinon

x_{ik} est nombre de demandes de type i découpées dans le roll k

L'objectif est de minimiser le nombre de roll utilisés

1° - La relaxation continue du modèle donne une borne inférieure du nombre minimum de rolls utilisés. Montrer que la relaxation continue du modèle de Kantorovich donne une valeur égale à la longueur totale des demandes divisée par la longueur d'un roll L. (2pt)

Décomposition de Dantzig-Wolfe du modèle de Kantorivich. On décompose selon les rolls k=1,…,K. Les contraintes (1) sont les contraintes couplantes entre les rolls.

On note :

$$X_k = \left\{ \begin{pmatrix} x_{*k} \\ z_k \end{pmatrix} \in \mathrm{N}^m \times \{0,1\} : \sum_{i=1}^{m} l_i x_{ik} \leq L z_k \right\} \;\; k = 1, \dots, K$$

Les X_k (k=1,…,K) ont tous le même nombre de points (de solutions) et ces points (solutions) sont identiques car les paramètres l_i $i = 1, \dots, m$ et L sont indépendants de k. On numérote ces solutions de 0 à p, la solution de n°0 étant le vecteur nul obtenu lorsque $z_k = 0$ et les solutions de numéros 1 à p étant celles où $z_k = 1$. A chaque point de X_k on associe un scalaire : λ_{k0} pour $\binom{0}{0}$ et λ_{kj} pour $\binom{x^j}{1}$ où x^j est une solution du sac-à-dos en nombres entiers définissant X_k . Un point $\binom{x_{*k}}{z_k} \in X_k$ peut s'écrire $\binom{x_{*k}}{z_k} = \lambda_{k0}\binom{0}{0} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj}\binom{x^j}{1}$ avec $\lambda_{k0}, \lambda_{kj} \in \{0,1\}$ $\forall j = 1, \dots, p$ et $\lambda_{k0} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj} = 1$.

λ_{kj} vaut 1 ou 0, et sa signification est : on choisit (ou pas) la solution *j* de X_k .

Nous avons à exprimer le modèle de Kantorovitch en fonction des λ :

D'abord l'objectif.

On note f_z la fonction qui consiste à prendre la coordonnée z d'un vecteur. Alors :

$$z_k = f_z\binom{x_{*k}}{z_k} = f_z\left(\lambda_{k0}\binom{0}{0} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj}\binom{x^j}{1}\right) = \lambda_{k0} f_z\binom{0}{0} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj} f_z\binom{x^j}{1} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj}$$

Ensuite les contraintes.

On note f_i $(i = 1, \dots, m)$ la fonction qui consiste à prendre la coordonnée i d'un vecteur. Alors :

$$x_{ik} = f_i\binom{x_{*k}}{z_k} = f_i\left(\lambda_{k0}\binom{0}{0} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj}\binom{x^j}{1}\right) = \lambda_{k0} f_i\binom{0}{0} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj} f_i\binom{x^j}{1} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj} x_i^j$$

x_i^j est le nombre de demandes de type i dans la solution n° j du sac-à-dos définissant X_k.

On relaxe maintenant les conditions d'intégrité sur les λ en : $\lambda_{kj} \geq 0$ $k = 1, \dots, K$ et $j = 0, 1, \dots, p$.

On obtient le modèle linéaire continu, noté D-W, suivant :

$$\min_{\lambda} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{p} a_{kj}^i \lambda_{kj} \geq n_i \quad i = 1, \dots, m & (3) \\ \sum_{j=0}^{p} \lambda_{kj} = 1 \quad k = 1, \dots, K & (4) \\ \lambda_{kj} \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \; j = 0, 1, \dots, p \end{cases}$$

Où $a_{kj}^{i} = x_{i}^{j}$ est le nombre de demandes de type i dans la solution j de X_k c'est-à-dire la coordonnée i dans la solution (le point) de numéro j.

On note ici que dans ce modèle on optimise sur $X = Conv(X_1) \times Conv(X_2) \times \ldots \times Conv(X_K)$ (cf les contraintes de convexité (4)) et non pas sur l'enveloppe convexe du produit cartésien. Mais en fait cela revient au même puisque $X = Conv(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_K)$. C'est la décomposition que l'on a qualifiée d'alternative.

On rappelle le modèle de Gilmore-Gomory :

$\min\limits_{u} \sum_{j=1}^{p} u_j$ sous les contraintes $\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} d_{ij} u_j \geq n_i \ \ i = 1, \ldots, m \quad (5) \\ \quad u_j \text{ entier naturel } \ j = 1, \ldots, p \end{cases}$

p est le nombre de patterns (patrons) non vides possibles et ce nombre est le nombre de points (solutions) d'un X_k moins le point de numéro j=0 correspondant au point où $z_k = 0$. d_{ij} est le nombre de demandes de type i présentes dans le pattern *j*. La variable u_j est le nombre de patterns *j* sélectionnés.

On note G-G$_{\text{relax}}$ la relaxation continue du modèle de Gilmore-Gomory où u_j nombre entier est relaxé en $u_j \geq 0 \ j = 1, \ldots, p$.

2° - a_{kj}^{i} est-il vraiment dépendant de k ? Quel est le lien entre a_{kj}^{i} et d_{ij} . (1/2pt)

3° - Suite à cette remarque, montrer que, à partir de toute solution réalisable (pas forcément optimale) du modèle D-W on peut construire une solution réalisable du modèle G-G$_{\text{relax}}$. (3pt)

4° - Montrer qu'à partir d'une solution optimale de G-G$_{\text{relax}}$ on peut construire une solution réalisable de D-W. (3pt)

5° - En déduire que ces deux relaxations D-W et G-G$_{\text{relax}}$ fournissent la même valeur . (1/2 pt)

6° - Application numérique : 1 seul type de demande (m=1), L≥3, n_1 nombre de demandes de type 1, $l_1 = \frac{L}{2} + 1$.

Donner la valeur rendue par la relaxation continue du modèle de Kantorovich (voir question 1°)

Donner la valeur rendue par G-G$_{\text{relax}}$. Comparer ces 2 valeurs. (1pt)

Correction : Découpe industrielle le modèle de Kantorovich et comparaison avec le modèle G-G

1° - D'abord z_k se met au plus bas (pour tout k) et par (2) : $z_k = \frac{\sum_{i=1}^m l_i x_{ik}}{L}$.

Notons que $z_k \leq 1$ car par (2) : $\sum_{i=1}^m l_i x_{ik} \leq L z_k \leq L$.

Alors l'objectif devient : $\sum_{k=1}^K z_k = \sum_{k=1}^K \frac{\sum_{i=1}^m l_i x_{ik}}{L} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K l_i x_{ik}}{L} = \frac{\sum_{i=1}^m l_i \sum_{k=1}^K x_{ik}}{L}$

Donc pour minimiser l'objectif il faut mettre les x_{ik} le plus bas possible et par (1) : $\sum_{k=1}^K x_{ik} = n_i$.

Finalement, l'objectif devient : $\sum_{k=1}^K z_k = \frac{\sum_{i=1}^m l_i n_i}{L}$

2° - Comme les solutions sont identiques pour tout k, l'indice k peut être retiré et $a_{kj}^i = d_{ij}$.

3° - On pose $u_j = \sum_{k=1}^K \lambda_{kj}$ pour tout j=1,…,p. Si λ_{kj} était en 0-1, u_j serait le nombre de fois que l'on a pris la solution j (j=1,…,p).

Alors l'objectif de D-W, $\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p \lambda_{kj}$, devient $\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K \lambda_{kj} = \sum_{j=1}^p u_j$. On retrouve l'objectif de G-G$_{\text{relax}}$.

(3) devient $\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p d_{ij} \lambda_{kj} \geq n_i$ puis $\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K d_{ij} \lambda_{kj} \geq n_i$ et $\sum_{j=1}^p d_{ij} u_j \geq n_i$. On retrouve (5).

4° - Réciproquement, on pose $\lambda_{kj} = \frac{u_j}{K}$ pour tout k=1,…,K et tout j=1,…,p.

Alors l'objectif de G-G$_{\text{relax}}$, $\sum_{j=1}^p u_j$, devient $\sum_{j=1}^p u_j = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K \frac{u_j}{K} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K \lambda_{kj}$. On retrouve l'objectif de D-W.

(5) devient $\sum_{j=1}^p d_{ij} \sum_{k=1}^K \frac{u_j}{K} \geq n_i \; puis \; \sum_{j=1}^p d_{ij} \sum_{k=1}^K \lambda_{kj} \geq n_i$ et comme $a_{kj}^i = d_{ij}$ on retrouve (3)

Maintenant, l'objectif optimal de G-G$_{\text{relax}}$ fournit une borne inférieure du nombre de rolls utilisés et donc $\sum_{j=1}^p u_j \leq K$ et $\sum_{j=1}^p K \lambda_{kj} \leq K$ et $\sum_{j=1}^p \lambda_{kj} \leq 1$ et on retrouve (4) la variable λ_{k0} jouant le rôle de variable d'écart.

5° - De la question 3 on déduit que la valeur optimale de D-W ≥ la valeur optimale de G-G$_{\text{relax}}$.

De la question 4, la valeur optimale de G-G$_{\text{relax}}$ ≥ la valeur optimale de D-W. Et les valeurs coïncident finalement.

6° - somme totale des longueurs demandées : $n_1 \left(\frac{L}{2} + 1\right)$

Valeur rendue par la relaxation continue du modèle de Kantorovich : $\frac{n_1\left(\frac{L}{2}+1\right)}{L} = n_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{L}\right)$

Il y a un seul pattern non vide possible : on découpe une barre de longueur $\frac{L}{2}+1$ dans un roll. Donc p=1 et $d_{11}=1$. G-G$_{relax}$ s'écrit :

$$\min_{u}\ u_1 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} d_{11}u_1 \geq n_1 \\ u_1 \geq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

On trouve $u_1 = \frac{n_1}{d_{11}} = n_1$.

Inégalité stricte entre les 2 bornes. L'écart s'accroît avec L pour aller jusqu'à un facteur 2 entre les deux bornes quand L tend vers l'infini.